

SÉRIE A, n° 1639

N° D'ORDRE :

2505

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

M. J. BERNAMONT

1^{re} THÈSE. — FLUCTUATIONS DE POTENTIEL AUX BORNES D'UN
CONDUCTEUR MÉTALLIQUE DE FAIBLE VOLUME
PARCOURU PAR UN COURANT.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **18 Mai 1936** devant la Commission d'examen

MM. A. COTTON..... *Président.*

L. BRILLOUIN... } *Examineurs.*

F. PERRIN..... }

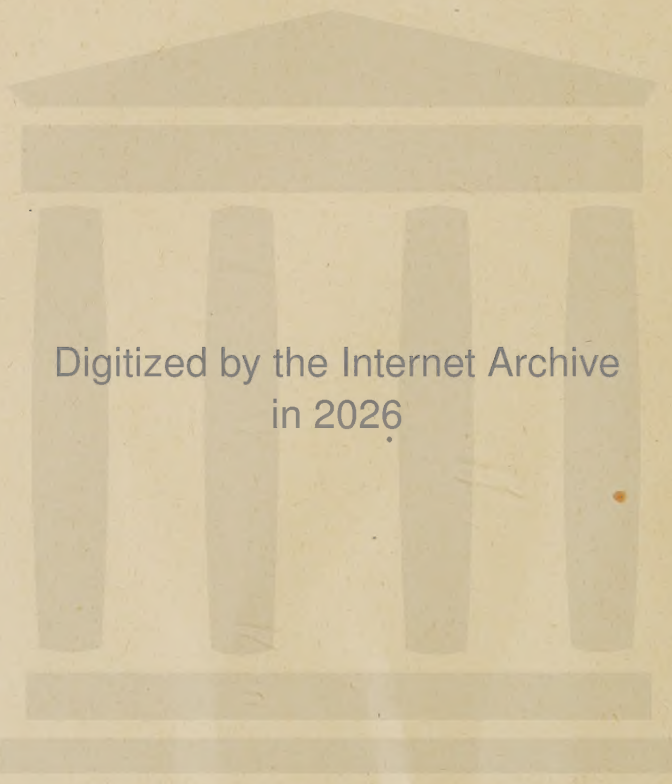
PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1936



Digitized by the Internet Archive
in 2026

SÉRIE A, n° 1639

N° D'ORDRE :

2505

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

M. J. BERNAMONT

1^{re} THÈSE. — FLUCTUATIONS DE POTENTIEL AUX BORNES D'UN
CONDUCTEUR MÉTALLIQUE DE FAIBLE VOLUME
PARCOURU PAR UN COURANT.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **Mai 1936** devant la Commission d'examen

MM. A. COTTON *Président.*

L. BRILLOUIN... } *Examineurs.*

F. PERRIN..... }

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1936

MM.

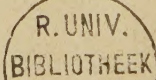
Doyen honoraire..... M. MOLLIARD.
Doyen..... C. MAURAIN, Professeur, Physique du Globe.

<i>Professeurs honoraires</i>	{	H. LE CHATELIER.	Léon BRILLOUIN.	AUGER.
		H. LEBESGUE.	GOURSAT.	BLAISE.
		A. FERNBACH.	WALLERANT.	DANGEARD.
		A. LEDUC.	GUILLET.	JANET.
		Émile PICARD.	PÉCHARD.	LESPIEAU.
		Rémy PERRIER.	FREUNDLER.	MARCHIS.
				VESSIOT.

PROFESSEURS

G. BERTRAND.....	† Chimie biologique.	M. JAVILLIER.....	Chimie biologique.
M. CAULLERY.....	† Zoologie (Évolution des êtres organisés).	L. JOLEAUD.....	Paléontologie.
G. URBAIN.....	† Chimie générale.	ROBERT-LÉVY....	Zoologie.
Émile BOREL.....	† Calcul des probabilités et Physique mathématique.	F. PICARD.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Jean PERRIN.....	† Chimie physique.	Henri VILLAT.....	† Mécanique des fluides et applications.
H. ABRAHAM.....	† Physique.	Ch. JACOB.....	† Géologie.
E. CARTAN.....	† Géométrie supérieure.	P. PASCAL.....	† Chimie minérale.
M. MOLLIARD.....	† Physiologie végétale.	M. FRÉCHET.....	† Calcul différentiel et Calcul intégral.
L. LAPICQUE.....	† Physiologie générale.	E. ESCLANGON....	† Astronomie.
A. COTTON.....	† Recherches physiques.	M ^{me} RAMART-LUCAS	† Chimie organique.
J. DRACH.....	† Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	H. BÉGHIN.....	† Mécanique physique et expérimentale.
Charles FABRY....	† Enseignement de Physique.	FOCH.....	Mécanique expérimentale des fluides.
Charles PÉREZ. .	† Zoologie.	PAUTHENIER.....	Physique (P. C. B.).
Léon BERTRAND..	† Géologie structurale et géologie appliquée.	De BROGLIE.....	† Théories physiques.
P. PORTIER.....	† Physiologie comparée.	CHRÉTIEN.....	Optique appliquée.
E. RABAUD.....	† Biologie expérimentale.	P. JOB.....	Chimie générale.
M. GUICHARD.....	Chimie minérale.	LABROUSTE.....	Physique du Globe.
Paul MONTEL.....	† Théorie des fonctions et Théorie des transformations.	PRENANT.....	Zoologie.
P. WINTREBERT..	† Anatomie et histologie comparées.	VILLEY.....	Mécanique physique et expérimentale.
L. BLARINGHEM..	† Botanique.	BOHN.....	Zoologie (P. C. B.).
O. DUBOSCQ.....	† Biologie maritime.	COMBES.....	Botanique (P. C. B.).
G. JULIA.....	† Mécanique analytique et Mécanique céleste.	GARNIER.....	† Mathématiques générales.
C. MAUGUIN.....	† Minéralogie.	PÈRES.....	Mécanique des fluides.
A. MICHEL-LÉVY.	† Pétrographie.	HACKSPILL.....	Chimie (P. C. B.).
H. BÉNARD.....	† Mécanique expérimentale des fluides.	LAUGIER.....	Physiologie générale.
A. DENJOY.....	† Application de l'analyse à la Géométrie.	TOUSSAINT.....	Technique Aéronautique.
L. LUTAUD.....	† Géographie physique et géologie dynamique.	M. CURIE.....	Physique (P. C. B.).
Eugène BLOCH....	† Physique théorique et physique céleste.	G. RIBAUD.....	† Hautes températures.
G. BRUHAT.....	Physique.	CHAZY.....	† Mécanique rationnelle.
E. DARMOIS.....	Enseignement de Physique.	GAULT.....	Chimie (P. C. B.).
A. DEBIERNE.....	† Physique Générale et Radioactivité.	CROZE.....	Recherches physiques.
A. DUFOUR.....	† Physique. (P. C. B.).	DUPONT.....	† Théories chimiques.
L. DUNOYER.....	Optique appliquée.	LANQUINE.....	Géologie.
A. GUILLIERMOND.	† Botanique.	VALIRON.....	Mathématiques générales.
		BARRABÉ.....	Géologie structurale et géologie appliquée.
		MILLOT.....	Zoologie (P. C. B.).
		F. PERRIN.....	Théories physiques.
		VATON.....	Chimie organique
		G. DARMOIS.....	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.

Secrétaire..... A. PACAUD.
Secrétaire honoraire..... D. TOMBECK.



FLUCTUATIONS DE POTENTIEL AUX BORNES D'UN CONDUCTEUR MÉTALLIQUE DE FAIBLE VOLUME PARCOURU PAR UN COURANT

Par J. BERNAMONT

INTRODUCTION

Historique. — Lorsqu'on mesure à l'aide d'un pont de Wheastone relié à un galvanomètre extrêmement sensible une résistance de quelques centaines de mille ohms constituée par un dépôt métallique mince, on constate que le spot du galvanomètre est agité d'un mouvement désordonné qui rappelle parfaitement le mouvement brownien.

On peut encore relier le pont à un amplificateur apériodique sur les fréquences acoustiques et brancher à la sortie un haut-parleur. Lorsque l'entrée de l'amplificateur est court-circuitée, on entend un bruit de fond, ou souffle, phénomène bien connu, dû en majeure partie à la discontinuité des charges électriques qui constituent le courant plaque de la première lampe amplificatrice. Ce phénomène qu'on appelle effet de grenaille (shot-effect) a été découvert et étudié pour la première fois par W. Schottky (1 à 3).

Si maintenant on branche le pont sans y faire passer aucun courant, le bruit de fond est accru par l'agitation thermique dans les résistances. L'intensité et la nature du souffle ne dépendent nullement du genre de résistances employées, mais seulement de leur valeur ohmique, tout au moins si l'on peut négliger les effets de self-induction et de capacité,

pour les fréquences étudiées. Ce phénomène a été découvert et étudié par J. B. Johnson (4 à 6).

Lorsqu'on lance un courant dans le pont, le souffle augmente encore, tout en donnant une impression analogue sur l'oreille. Mais alors l'intensité du souffle dépend essentiellement des résistances étudiées. L'effet est nul en particulier avec les résistances bobinées.

J'ai publié mes premières observations sur ce phénomène en 1934 (7), en essayant d'en donner une explication. L. Brillouin (8) l'a étudié théoriquement du point de vue quantique. E. Meyer et H. Thiede (9) ont publié une étude analogue à celle qui suit en juillet 1935, au sujet de résistances commerciales constituées par des dépôts de carbone.

Pour ma part, je me suis efforcé d'étudier des résistances métalliques aussi bien définies que possible. La fabrication de couches minces de platine, effectuée avec l'aide de A. Féry, exige beaucoup de soins et de temps si l'on veut aboutir à un métal dont les propriétés soient toujours les mêmes. C'est pourquoi mes expériences, bien qu'antérieures en partie à celles de E. Meyer et H. Thiede ne sont publiées que maintenant.

Explication du phénomène. — Dès mes premières observations, j'ai pensé que ce phénomène était dû aux fluctuations du nombre d'électrons libres dans le conducteur, produisant des fluctuations de sa résistance. Il doit dès lors apparaître dans le circuit une force électromotrice désordonnée, dont le carré moyen est donné par la formule :

$$(1) \quad \overline{e^2} = I^2 \overline{\Delta R^2} \quad (1)$$

(1) J'introduis dans l'étude des fluctuations électriques la notion de force électromotrice de fluctuation, qui est une grandeur qui dépend de l'élément fluctuant, mais non du reste du circuit. La force électromotrice est égale à la différence de potentiel aux bornes de l'élément fluctuant, lorsque l'impédance du reste du circuit est très grande par rapport à l'impédance de l'élément fluctuant.

où I est l'intensité du courant permanent et ΔR l'écart momentané de résistance à partir de la valeur moyenne. On peut encore écrire, si la résistance est inversement proportionnelle au nombre total d'électrons libres N , comme on le démontre en théorie classique, pour un conducteur cylindrique

$$(2) \quad \overline{e^2} = I^2 R^2 \frac{\overline{\Delta N^2}}{N^2} = \frac{I^2 R^2}{n_0 u} \frac{\overline{\Delta N^2}}{N}$$

en appelant n_0 le nombre d'électrons libres par unité de volume et u le volume du conducteur. Léon Brillouin (8) démontre en statistique quantique une formule équivalente.

Le facteur $\frac{\overline{\Delta N^2}}{N}$ est indépendant du volume ; il serait en particulier égal à 1 en théorie classique.

Objet de cette étude. — J'ai pensé que l'étude de ce phénomène pouvait donner des renseignements intéressants sur la constitution des métaux et le mécanisme de la conductibilité. Mais l'équation (2) ne pourrait directement rendre compte des expériences que si l'on disposait d'un amplificateur qui amplifie également toutes les fréquences, ce qui ne peut évidemment être réalisé. J'ai donc été conduit à mesurer, avec un amplificateur sélectif, l'intensité du phénomène en fonction de la fréquence et de l'intensité du courant pour divers dépôts. C'est l'objet de la partie expérimentale de ce travail. Et pour pouvoir tirer de cette étude toutes les conséquences qu'elle comporte, il m'a paru utile de la faire précéder d'une étude mathématique générale des fluctuations.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE MATHÉMATIQUE DES FLUCTUATIONS

Sommaire. — Les auteurs qui ont étudié les phénomènes de fluctuation ont d'abord fait appel aux développements en séries de Fourier. Ils se sont en général contentés de calculs très peu précis, qui donnent parfois des résultats incertains. M. Courtines, renonçant complètement à l'utilisation des développements de Fourier, a systématisé, dans le calcul des phénomènes de fluctuation, l'emploi des fonctions de corrélation. Le calcul peut être ainsi conduit d'une manière parfaitement rigoureuse. Je cherche ici à concilier les deux points de vue et à me servir de la notion de corrélation pour donner aux développements de Fourier la rigueur mathématique qui leur manquait.

Lorsqu'une grandeur physique y est sujette à des fluctuations, on peut définir, pour chaque fréquence ν , une composante spectrale d'intensité $\overline{y_\nu^2}$ qui satisfait aux relations :

$$(I) \quad \overline{y_\nu^2} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{yy_t} e^{2\pi i \nu t} dt \quad (1)$$

$$(II) \quad \overline{y^2} = \int_0^\infty \overline{y_\nu^2} d\nu.$$

Les conditions de validité de ces équations sont précisées du point de vue mathématique.

(1) $\overline{yy_t}$ est une notation abrégée pour $\overline{y(t_0) y(t_0 - t)}$, où la moyenne est prise par rapport à t_0 ; on suppose que les fonctions envisagées sont telles que cette moyenne soit définie.

L'introduction de ces notions en électricité permet d'aboutir à la généralisation de la loi d'Ohm sous la forme :

$$(III) \quad \overline{E_v^2} = \overline{I_v^2} Z_v^2,$$

où Z_v^2 est le carré de l'impédance pour un courant sinusoïdal de fréquence v . On peut ainsi décrire complètement le comportement de fluctuations d'une grandeur électrique reçue et transmise par un appareil relativement complexe (un amplificateur, par exemple), lorsqu'on connaît la courbe de réponse de cet appareil en fonction de la fréquence, à condition que la courbe de réponse en fonction de l'intensité soit une droite.

Je passe ensuite à l'étude des fluctuations thermiques. Nyquist a montré par un raisonnement thermodynamique assez délicat qu'en l'absence de tout courant permanent, une résistance est le siège d'une force électromotrice désordonnée qui, avec les notations que nous avons adoptées, satisfait à la relation :

$$(IV) \quad \overline{e_v^2} = 4RkT.$$

La nouvelle méthode de calcul permet de déduire très simplement cette formule de l'équation d'Einstein, relative à l'énergie utilisable U ,

$$(V) \quad \overline{\delta U} = \frac{1}{2} kT. \quad (1)$$

D'autre part, l'équation (IV) doit pouvoir se déduire de n'importe quel mécanisme de la conductibilité, pourvu qu'il satisfasse aux principes de la thermodynamique. Je déduis

(1) Au voisinage d'une position d'équilibre, l'énergie utilisable s'exprime en fonction du paramètre étudié x par une équation qui est en général de la forme :

$$\delta U = U - U_0 = A(x - x_0)^2,$$

où l'indice (0) correspond à la valeur d'équilibre ; c'est dans ces conditions que l'équation (V) est valable.

en effet cette formule du mécanisme de la conductibilité par électrons libres et chocs élastiques en utilisant soit la statistique classique de Boltzmann et les calculs de Lorentz, soit la statistique quantique de Fermi-Dirac, et les calculs de Sommerfeld et L. Brillouin.

CHAPITRE PREMIER

Fonctions de corrélation.

La notion de corrélation, déjà bien connue des statisticiens, mais peu utilisée jusqu'à présent dans les phénomènes moléculaires, a été développée par M. Courtines dans un rapport au Congrès international d'électricité (12). Je renvoie à cet ouvrage pour une étude plus détaillée et pour les indications bibliographiques. Je ne donnerai ici qu'un aperçu très sommaire.

Le trait essentiel de la méthode est l'introduction, dans la notion de moyenne, du caractère de permanence de ces moyennes. Soient deux grandeurs physiques mesurables u et v , dépendant du temps et fluctuant autour de valeurs moyennes u_0 et v_0 par l'effet d'un même mécanisme moléculaire. Soit $f(u, v)$ une fonction de ces deux grandeurs. En général, la quantité

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t f(u, v) dt$$

a une limite pour $t = \infty$. Lorsque cette limite est indépendante de l'état initial t_0 , ce sera, par définition, la valeur moyenne de $f(u, v)$ que l'on notera $\overline{f(u, v)}$. On peut encore supposer l'existence d'un grand nombre de dispositifs d'étude identiques entre eux et pointer simultanément u et v dans les N dispositifs. On pourra définir $\overline{f(u, v)}$ par l'équation :

$$\overline{f(u, v)} = \lim_{N = \infty} \frac{\sum_{i=1}^{i=N} f(u_i, v_i)}{N}.$$

Ces deux définitions sont équivalentes. Une moyenne particulièrement intéressante est $\overline{u(t)u(t-\tau)}$ qu'on appellera fonction de corrélation relative à u et qu'on notera $\overline{uu}_\tau$. On définit de même une fonction de corrélation relative à u et v :

$$\overline{uv}_\tau = \overline{u(t)v(t-\tau)}.$$

Etudions quelques propriétés générales de ces fonctions.

Inversion des facteurs. — L'ordre des facteurs n'est pas en général indifférent, mais on a évidemment :

$$(1) \quad \overline{uv}_\tau = \overline{vu}_{-\tau},$$

$$(2) \quad \overline{uu}_\tau = \overline{uu}_{-\tau}.$$

Dérivées. — Calculons la dérivée par rapport à τ de $\overline{uv}_\tau$ en supposant que u, v, u' et v' sont des fonctions continues ⁽¹⁾.

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{uv}_{\tau+\delta\tau} - \overline{uv}_\tau &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta u(t)v(t-\tau-\delta\tau) \\ &\quad - \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta u(t)v(t-\tau)dt. \end{aligned} \right.$$

(1) Les quantités qui s'introduisent dans les problèmes de physique sont souvent discontinues. Ainsi dans le calcul de l'effet de grenaille, on considère le nombre d'électrons compris dans l'espace filament plaque. Les discontinuités sont séparées par des intervalles de temps très petits, en général inférieurs à 10^{-13} sec., que nous appellerons durées microscopiques. Mais les grandeurs physiques mesurées sont en réalité des moyennes prises pendant un intervalle de temps qui est de l'ordre de la période de nos appareils de mesures. Les grandeurs qui s'introduisent dans les équations sont physiquement qualifiées d'instantanées lorsque les moyennes qu'elles représentent sont prises pendant des intervalles de temps de 10^{-9} sec. par exemple, très grands par rapport aux durées microscopiques et très petits par rapport aux périodes de nos appareils. Lorsque nous ferons intervenir l'analyse en fréquence, les plus petites périodes que nous

Appliquons le théorème des accroissements finis (en divisant par $\delta\tau$) :

$$(3 \text{ bis}) \quad \frac{\delta \overline{uv}_\tau}{\delta\tau} = - \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta u(t)v'(t - \tau - \varepsilon\delta\tau) dt$$

où ε est un nombre compris entre 0 et 1.

Puisque toutes nos moyennes sont des fonctions continues, ainsi que u et v' , nous pouvons faire tendre $\delta\tau$ vers 0 ; à la limite on a :

$$(4) \quad \frac{d\overline{uv}_\tau}{d\tau} = - \overline{uv'_\tau}.$$

Mais, en vertu de la relation (1), nous pouvons encore écrire :

$$(5) \quad \frac{d\overline{uv}_\tau}{d\tau} = \frac{d\overline{vu}_{-\tau}}{d\tau} = \overline{u'v_\tau}.$$

Pour dériver une fonction de corrélation, on fait porter la dérivation sur le premier facteur seul, ou sur le second facteur seul, en faisant dans ce dernier cas précéder le produit du signe moins.

Une relation très importante est la suivante :

$$(6) \quad \overline{uv'_\tau} + \overline{u'v_\tau} = 0$$

aurons à considérer seront de 10^{-6} sec., et il est bien entendu que nos équations ne sauraient être valables pour les fréquences lumineuses.

Soit U la valeur instantanée d'une certaine grandeur, ce que nous porterons dans nos équations, ce sera

$$u = \frac{1}{\theta} \int_{t_0 - \theta}^t U(t) dt$$

où θ est un intervalle de temps constant de l'ordre de 10^{-9} sec. ; u est alors fonction continue du temps au sens mathématique du mot.

ou d'une façon plus générale :

$$(7) \quad \overline{uv_{\tau}^{(2n+1)}} + \overline{u^{(2n+1)}v_{\tau}} = 0.$$

Pour une dérivée d'ordre n , on aura :

$$(8) \quad \frac{d^n \overline{uv_{\tau}}}{d\tau^n} = (-1)^{\alpha} \overline{u^{(n-\alpha)}v_{\tau}^{(\alpha)}}.$$

α étant arbitraire.

Etude de $\overline{uu_{\tau}}$ au voisinage de $\tau = 0$. — 1° Lorsque u et u' sont des fonctions continues, la dérivée par rapport à τ de $\overline{uu_{\tau}}$ tend vers zéro lorsque τ tend vers 0 par valeurs positives. En effet l'équation (3 bis) devient :

$$(9) \quad \frac{\overline{uu_{\delta\tau}} - \overline{u^2}}{\delta\tau} = - \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} u(t)u'(t - \varepsilon\delta\tau)dt.$$

Si au lieu de $u(t)u(t - \delta\tau)$ nous avons écrit dans le second membre de l'équation (3) $u(t)u(t + \delta\tau)$, dont la valeur moyenne est la même, nous aurions trouvé :

$$(10) \quad \frac{\overline{uu_{\delta\tau}} - \overline{u^2}}{\delta\tau} = + \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} u(t)u'(t + \varepsilon'\delta\tau)dt.$$

Puisque u' est continue, les seconds membres des équations (9) et (10) ont même limite en valeur absolue lorsque $\delta\tau$ tend vers zéro. Comme les signes sont opposés, cette limite est nulle.

2° $\overline{uu_{\tau}}$ est toujours plus petit que $\overline{u^2}$.

En effet, posons :

$$u(t + \tau) = u(t) + \delta u_{\tau}.$$

Elevons chaque membre de cette équation au carré et prenons la moyenne, il vient :

$$\overline{u(t + \tau)^2} = \overline{u(t)^2} + 2\overline{u(t)\delta u_{\tau}} + \overline{\delta u_{\tau}^2}.$$

Le premier membre est évidemment égal au premier terme du second membre, donc :

$$\overline{u(t)\delta u_\tau} \leq 0,$$

ou, en remplaçant δu_τ par sa valeur $u(t + \tau) - u(t)$:

$$(11) \quad \overline{uu_\tau} - \overline{u^2} \leq 0.$$

En résumé, lorsque u et u' sont continues, $\frac{d\overline{uu_\tau}}{d\tau}$ est continue à l'origine, et l'on a :

$$(12) \quad \left[\frac{d\overline{uu_\tau}}{d\tau} \right]_0 = 0, \quad \left[\frac{d^2\overline{uu_\tau}}{d\tau^2} \right]_0 \leq 0, \quad \left[\overline{u'u'_\tau} \right]_0 \geq 0.$$

Intégrale de corrélation. — Dans les chapitres suivants nous aurons besoin de connaître la limite d'expressions du type suivant :

$$\lambda = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int \int_{\substack{t'=t_0+\theta \\ t=t_0}}^{t'=t_0+\theta} u(t)v(t')f(t-t')dt dt'.$$

Comme cette limite s'exprime au moyen des fonctions de corrélation, nous allons faire le calcul dès maintenant.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

- 1° u , v et f sont bornées supérieurement ;
- 2° Les fonctions u et v sont telles que le produit moyen $\overline{uv}_\tau$ soit défini ;

- 3° L'intégrale $\int_{-\tau_1}^{+\tau_1} \overline{uv}_\tau f(\tau) d\tau$ est convergente pour $\tau_1 = \infty$.

Effectuons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \tau = t - t' \\ T = t - t_0. \end{cases}$$

Le nouveau domaine d'intégration sera limité par les droites (fig. 1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = 0 \\ T - \tau = 0 \\ T = \theta \\ T - \tau = \theta. \end{array} \right.$$

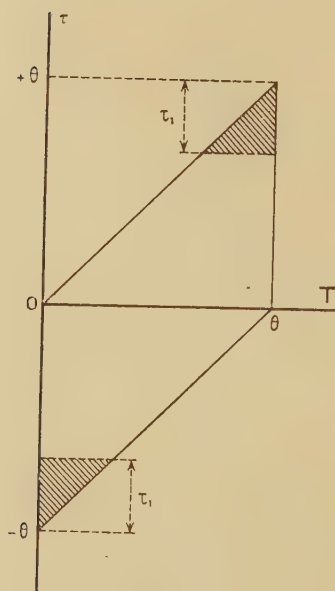


Fig. 1.

Nous pouvons encore écrire :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta f(\tau) d\tau \int_\tau^\theta u(T + t_0) v(T + t_0 - \tau) dT \\ &+ \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^0 f(\tau) d\tau \int_0^{\theta+\tau} u(T + t_0) v(T + t_0 - \tau) dT. \end{aligned}$$

Evaluons l'intégrale dans le domaine obtenu en négligeant

les deux triangles hachurés (fig. 1) limités par les droites :

$$\tau = \pm (\theta - \tau_1).$$

L'erreur commise de ce fait est, en appelant A, B et C les bornes supérieures de u , v et f , inférieure à $\frac{\tau_1^2}{\theta}$ ABC. Nous ferons augmenter indéfiniment τ_1 en même temps que θ suivant une loi telle que $\frac{\tau_1^2}{\theta}$ tende vers 0 lorsque $\theta \rightarrow \infty$ (par exemple, nous prendrons $\tau_1 = a \sqrt[3]{\theta}$).

Nous aurons :

$$\begin{aligned} \lambda = & \lim_{\theta = \infty} \int_0^{\theta - \tau_1} \frac{\theta - \tau}{\theta} f(\tau) d\tau \cdot \frac{1}{\theta - \tau} \int_{\tau}^{\theta} u(T + t_0) v(T + t_0 - \tau) dT \\ & + \lim_{\theta = \infty} \int_{-\theta + \tau_1}^0 \frac{\theta + \tau}{\theta} f(\tau) d\tau \cdot \frac{1}{\theta + \tau} \int_0^{\theta + \tau} u(T + t_0) v(T + t_0 - \tau) dT \end{aligned}$$

Dans chaque terme le second facteur tend vers $\overline{uv}_{\tau}$, puisque l'intervalle d'intégration augmente indéfiniment avec θ . D'où :

$$\lambda = \lim_{\theta = \infty} \int_0^{\theta - \tau_1} \frac{\theta - \tau}{\theta} \overline{uv}_{\tau} f(\tau) d\tau + \int_{-\theta + \tau_1}^0 \frac{\theta + \tau}{\theta} \overline{uv}_{\tau} f(\tau) d\tau$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \lambda = & \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{uv}_{\tau} f(\tau) d\tau - \lim_{\theta = \infty} \int_0^{\theta - \tau_1} \frac{\tau}{\theta} \overline{uv}_{\tau} f(\tau) d\tau \\ & + \lim_{\theta = \infty} \int_{-\theta + \tau_1}^0 \frac{\tau}{\theta} \overline{uv}_{\tau} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Chacun des deux derniers termes tend vers 0 lorsque θ augmente indéfiniment. Vérifions-le pour le premier. Appliquons le théorème de la moyenne :

$$\int_0^x \frac{\tau}{\theta} \overline{uv}_{\tau} f(\tau) d\tau = \frac{x_1}{\theta} \int_0^x \overline{uv}_{\tau} f(\tau) d\tau$$

où

$$0 \leq x_1 \leq x.$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta-\tau_1} \frac{\tau}{\theta} \overline{uv}_\tau f(\tau) d\tau &= \int_0^{\tau_1} \frac{\tau}{\theta} \overline{uv}_\tau f(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_{\tau_1}^{\theta-\tau_1} \frac{\tau}{\theta} \overline{uv}_\tau f(\tau) d\tau \\ &= \frac{\tau_1'}{\theta} \int_0^{\tau_1} \overline{uv}_\tau f(\tau) d\tau + \frac{\theta_1}{\theta} \int_{\tau_1}^{\theta-\tau_1} \overline{uv}_\tau f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

où $0 < \tau_1' < \tau_1$ et $\tau_1 < \theta_1 < \theta$.

Le premier terme tend vers 0 lorsque θ augmente indéfiniment parce que $\frac{\tau_1}{\theta}$ et *a fortiori* $\frac{\tau_1'}{\theta}$ tend vers 0. Le second tend aussi vers 0, parce que l'intégrale $\int_0^\infty \overline{uv}_\tau f(\tau) d\tau$ est convergente et que son reste entre τ_1 et $\theta - \tau_1$ tend par conséquent vers 0.

En définitive nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} (13) \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int \int_{\substack{t'=t_0+\theta \\ t=t_0}}^{t'=t_0+\theta} u(t)v(t')f(t-t')dt dt' \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{uv}_\tau f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

CHAPITRE II

Décomposition spectrale des fluctuations.

Séries de Fourier. — On sait qu'une fonction y satisfaisant à quelques conditions très générales de continuité peut être représentée à l'intérieur d'un intervalle de temps $t_0, t_0 + T_0$ par une somme infinie :

$$(14) \quad y = \sum_{K=-\infty}^{K=+\infty} D_K e^{iK\omega_0 t}$$

$$(15) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

où D_K est un nombre complexe. Lorsque la fonction y est réelle, ce que nous supposons toujours dans cette étude, D_{-K} est conjugué de D_K .

On déduit immédiatement de la formule ci-dessus :

$$(16) \quad D_K = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} y e^{-iK\omega_0 t} dt$$

et

$$(17) \quad \overline{y^2} = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} y^2 dt = \sum_{K=-\infty}^{K=+\infty} D_K D_{-K}.$$

Spectre d'intensité ⁽¹⁾. — Soit une fonction quelconque du temps y ; remplaçons-la par une fonction auxiliaire z qui

(1) Nous cherchons ici comment on peut représenter la fonction y^2 par une intégrale de Fourier ; d'où le terme spectre d'intensité. Si on cherche à représenter la fonction y elle-même et à

soit identique à y dans l'intervalle $(t_0, t_0 + T_0)$ et se reproduise périodiquement de t_0 à $t = -\infty$ et de $t_0 + T_0$ à $t = +\infty$; z est donc définie par la relation :

$$(18) \quad z(t) = y(t - KT_0)$$

où K est un entier choisi, en sorte que :

$$(19) \quad t_0 \leq t - KT_0 < t_0 + T_0.$$

Pour la fonction z , il est indifférent de prendre les moyennes pour un nombre entier de périodes ou pour un temps infini. Nous calculerons $\overline{z^2}$ et nous considérerons $\overline{y^2}$ comme la limite de $\overline{z^2}$ lorsque T_0 augmente indéfiniment :

$$\begin{aligned} \overline{z^2} &= \sum_{K=-\infty}^{K=+\infty} D_K D_{-K} \\ &= \sum_{K=-\infty}^{K=+\infty} \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} y(t') e^{-iK\omega_0 t'} dt' \times \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} y(t) e^{iK\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

définir ainsi un spectre d'amplitude, on n'arrive pas en général à des grandeurs ayant un sens physique. Lorsqu'on veut analyser une impulsion, c'est-à-dire une fonction qui tend vers 0 pour $t = \pm\infty$, on peut écrire :

$$(14 \text{ bis}) \quad y = \int_{-\infty}^{+\infty} A_\nu e^{2\pi i \nu t} d\nu,$$

avec

$$(16 \text{ bis}) \quad A_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-2\pi i \nu t} dt.$$

On appelle A_ν la composante spectrale d'amplitude de la fonction y ; la condition nécessaire et suffisante pour que A_ν soit définie à toute fréquence et que $\int_{-\infty}^{+\infty} y dt$ soit absolument convergente.

Mais cette définition du spectre d'amplitude est purement mathématique. Ainsi un changement de l'origine des temps ne laisse pas invariante la fonction A_ν . Il est dès lors impossible d'assigner un sens physique à cette grandeur.

ou encore :

$$(20) \quad \overline{x^2} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \delta\nu \frac{1}{T_0} \int \int_{\substack{t'=t_0 \\ t=t_0}}^{\substack{t'=t_0+T_0 \\ t=t_0+T_0}} y(t)y(t') e^{2\pi i \nu(t-t')} dt dt',$$

en posant :

$$\nu = K\nu_0 = \frac{K}{T_0}; \quad \delta\nu = \nu_0 \delta K = \frac{\delta K}{T_0} \quad (\text{ici } \delta K = 1).$$

Nous supposerons que l'intégrale

$$\frac{1}{T_0} \int \int_{\substack{t'=t_0+T_0 \\ t=t_0}}^{t'=t_0+T_0} |y(t)y(t')| dt'$$

a une limite finie indépendante de t_0 pour $T_0 = \infty$. Nous poserons en nous servant de la relation (13) :

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \overline{y^2} &= \lim_{T_0=\infty} \frac{1}{T_0} \int \int_{\substack{t'=t_0+T_0 \\ t=t_0}}^{t'=t_0+T_0} y(t)y(t') e^{2\pi i \nu(t-t')} dt dt' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{yy_\tau} e^{2\pi i \nu \tau} d\tau \end{aligned} \right.$$

et nous appellerons $\overline{y^2}_\nu$ la *composante spectrale d'intensité* de la fonction y . Nous avons donc :

$$(22) \quad \overline{y^2} = \lim_{T_0=\infty} \overline{x^2} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \overline{y^2}_\nu \delta\nu = \int_0^\infty \overline{y^2}_\nu d\nu,$$

puisque :

$$\overline{y^2}_\nu = \overline{y^2}_{-\nu}.$$

D'un point de vue formel, nous définirons désormais $\overline{y^2}$ et $\overline{y^2}_\nu$ par le groupe d'équations :

$$(23) \quad \overline{y^2} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{yy_t} e^{2\pi i \nu t} dt = 4 \int_0^{\infty} \overline{yy_t} \cos 2\pi \nu t dt$$

$$(24) \quad \overline{y^2} = \int_0^{\infty} \overline{y^2} d\nu$$

lorsque les conditions suivantes, que nous appellerons conditions A, seront satisfaites :

$$A \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ} y(t_0)y(t_0-t) \text{ a une valeur moyenne indépendante de } t_0; \\ 2^{\circ} \text{ l'intégrale } \int_0^t \overline{yy_t} dt \text{ est absolument convergente pour } t = \infty. \end{array} \right.$$

Le calcul qui précède montre que ces définitions formelles sont bien d'accord avec la notion physique de carré moyen et de composante spectrale d'intensité.

L'équation (23) signifie aussi que, d'un point de vue purement mathématique, $\frac{1}{2} \overline{y^2}$ est la composante d'amplitude de la fonction de corrélation $\overline{yy_t}$ (cf. équation 14 bis). On a donc conformément aux théorèmes sur les intégrales de Fourier :

$$(25) \quad \overline{yy_t} = \int_0^{\infty} \overline{y^2} \cos 2\pi \nu t d\nu$$

Composante spectrale d'un produit de deux fonctions. — Les mêmes calculs s'appliquent au produit de deux fonctions u et v . Nous définirons donc la composante spectrale du produit de deux fonctions par les relations suivantes valables aux mêmes conditions que précédemment :

$$(26) \quad \overline{uv}_v = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{uv}_t e^{2\pi i v t} dt,$$

$$(27) \quad \overline{uv} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{uv}_v dv$$

$\overline{uv}_v$ n'est pas commutable, mais on a la relation :

$$\overline{uv}_v = \overline{vu}_{-v}.$$

Nous appellerons *composante spectrale symétrique* ⁽¹⁾ du produit de deux fonctions la grandeur :

$$(29) \quad (\overline{uv})_v = \frac{\overline{uv}_v + \overline{vu}_v}{2} = \frac{\overline{uv}_v + \overline{uv}_{-v}}{2}.$$

Les relations 26 et 27 deviennent :

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} (uv)_v &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\overline{uv}_t + \overline{vu}_t) e^{2\pi i v t} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} (\overline{uv}_t + \overline{vu}_t) \cos 2\pi v t dt; \end{aligned} \right.$$

$$(31) \quad \overline{uv} = \int_0^{\infty} (\overline{uv})_v dv.$$

Théorème. — Lorsque les conditions (A) sont satisfaites par une fonction y et ses différentes dérivées, on a les relations suivantes :

$$1^\circ (32) \quad (\overline{yy^{(2n+1)}})_v = 0 \quad (n, \text{ entier positif ou nul})$$

car la relation (10 bis) nous donne :

$$\overline{yy_t^{(2n+1)}} + \overline{y^{(2n+1)}y_t} = 0.$$

$$2^\circ (33) \quad (\overline{y^{(\alpha)}y^{(2n+\alpha)}})_v = (-1)^n \omega^{2(n+\alpha)} \overline{y_v^\alpha} \quad (\omega = 2\pi v).$$

⁽¹⁾ On pourrait aussi définir une composante asymétrique

$$\text{réelle } \frac{\overline{uv}_v - \overline{vu}_v}{2i}.$$

Il suffit de démontrer les relations :

$$(34) \quad \overline{(yy'')}_v = -\omega^2 \overline{y^2}_v$$

et

$$(35) \quad \overline{y^2}_v = \omega^2 \overline{y^2}_v$$

et l'équation précédente s'en déduira par récurrence.

Démontrons par exemple la première relation. Nous avons par définition :

$$\overline{(yy'')}_v = \int_{-\infty}^{+\infty} (\overline{y'' y_t} + \overline{y y_t''}) e^{i\omega t} dt.$$

Intégrons deux fois par parties, en remarquant que :

$$\begin{aligned} \overline{y'' y_t} &= \overline{y y_t''} = \frac{d}{dt} \overline{y' y_t}, \\ y' y_t &= \frac{d}{dt} y y_t; \end{aligned}$$

d'autre part, $\overline{y y_t} = 0$ pour $t = \infty$, et $\frac{d\overline{y y_t}}{dt} = 0$ pour $t = 0$ et $t = \infty$.

Il vient donc :

$$\overline{(yy'')}_v = -2\omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y y_t} e^{i\omega t} dt.$$

On opérerait de même pour $\overline{y^2}_v$.

Coloration infiniment brève. — Nous dirons qu'il y a corrélation infiniment brève pour la fréquence ν , lorsqu'on peut négliger $\overline{y y_t}$, dès que t est supérieur en valeur absolue à une valeur t_0 qui est elle-même très petite par rapport à $\frac{1}{2\pi\nu}$, en sorte que $\overline{y y_t} \cos 2\pi\nu t$ puisse être assimilé à $\overline{y y_t}$. On a alors :

$$(36) \quad \overline{y^2}_v = 4 \int_0^\infty \overline{y y_t} dt.$$

La composante spectrale d'intensité de y est indépendante de la fréquence, tant que $\nu \ll \frac{1}{2\pi t_0}$.

Réciproquement, si $\overline{y_\nu^2}$ a une valeur sensiblement constante a dans un intervalle $\left(0, \nu_0 = \frac{1}{2\pi t_0}\right)$ et si $\overline{y_\nu^2}$ tend ensuite uniformément vers 0, l'équation (25) montre que $\overline{yy_t}$ peut se représenter à partir de la fréquence $\frac{1}{4t}$ par une série alternée dont le terme général tend uniformément vers 0; on peut donc écrire :

$$\overline{yy_t} < a \left[\left| \int_0^{\frac{1}{4t}} \cos 2\pi \nu t d\nu \right| + \left| \int_{\frac{1}{4t}}^{\frac{3}{4t}} \cos 2\pi \nu t d\nu \right| \right] = \frac{3a}{2\pi t}.$$

D'autre part, l'équation (24) donne :

$$\overline{y^2} > a \nu_0 = \frac{a}{2\pi t_0},$$

d'où :

$$(37) \quad \frac{\overline{yy_t}}{\overline{y^2}} < \frac{3t_0}{t},$$

c'est-à-dire que si $t_0 \ll t$, la corrélation est infiniment brève.

Forme limite de $\overline{y_\nu^2}$ pour $\nu = \infty$. — En vue d'étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \overline{y_\nu^2} d\nu$, nous allons chercher à développer $\overline{y_\nu^2}$ en fonction de $\frac{1}{\nu}$.

$$\overline{y_\nu^2} = 4 \int_0^\infty f(t) \cos 2\pi \nu t dt,$$

en posant $\overline{yy_t} = f(t)$, pour simplifier l'écriture.

Divisons le temps t en intervalles de temps consécutifs de grandeur $\frac{1}{\nu}$ et posons $t = \frac{K}{\nu} + \frac{1}{2\nu} + u$,

avec $-\frac{1}{2\nu} \leq u < +\frac{1}{2\nu}$. Il vient :

$$y_v^{\frac{1}{2}} = -4 \sum_{K=0}^{K=\infty} \int_{-\frac{1}{2v}}^{+\frac{1}{2v}} f\left(\frac{K}{v} + \frac{1}{2v} + u\right) \cos 2\pi v u \, du.$$

Nous supposons que la fonction f est développable en série de Taylor dans tout l'intervalle $0 < t < \infty$. Il vient :

$$(38) \quad y_v^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} V_n.$$

en posant :

$$(39) \quad V_n = -4 \sum_{K=0}^{K=\infty} f^{(n)}\left(\frac{K}{v} + \frac{1}{2v}\right) \times \int_{-\frac{1}{2v}}^{+\frac{1}{2v}} \frac{u^n}{n!} \cos 2\pi v u \, du.$$

Le facteur $\sum_{K=0}^{K=\infty} f^{(n)}\left(\frac{K}{v} + \frac{1}{2v}\right)$ représente au facteur $\frac{1}{v}$ près une somme de Riemann. Lorsque v augmente indéfiniment, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \sum_{K=0}^{K=\infty} f^{(n)}\left(\frac{K}{v} + \frac{1}{2v}\right) &= \int_0^{\infty} f^{(n)}(t) dt + \frac{R}{v^2} \\ &= f^{(n-1)}(\infty) - f^{(n-1)}(0) + \frac{R}{v^2} \end{aligned}$$

où R est borné supérieurement. Le reste $\frac{R}{v^2}$ est du second ordre en $\frac{1}{v}$, parce que la valeur attribuée à la fonction f dans chaque intervalle élémentaire est celle qui correspond au milieu de cet intervalle.

Le calcul de l'intégrale :

$$I_n = \int_{-\frac{1}{2v}}^{+\frac{1}{2v}} \frac{v u^n}{n!} \cos 2\pi v u \, du$$

se fait aisément par une intégration par partie, lorsque n est pair. Ces intégrales sont d'ailleurs nulles par raison de symétrie lorsque n est impair. On trouve :

$$I_0 = 0; \quad I_1 = 0; \quad I_2 = -\frac{1}{4\pi^2 v^2} = -\frac{1}{\omega^2}; \quad I_3 = 0.$$

On a finalement :

$$(40) \quad \overline{y_v^2} = 4 \frac{f'(\infty) - f'(0)}{\omega^2} + \frac{R'}{\omega^4} + \dots$$

Si les fonctions y et y' sont continues, $f'(0)$ est nul (voir p. 10).

Nous supposons d'autre part que $f'(\infty)$ est également nul. Dans ce cas le premier terme du développement de $\overline{y_v^2}$ est en $\frac{1}{v^4}$ au moins.

Nous avons supposé que la fonction f pouvait se développer en série de Taylor, mais nous ne nous sommes servis que des trois premiers termes de développement. Nous pouvons donc dire que $\overline{y_v^2}$ peut se développer pour les grandes valeurs de v en fonction de $\frac{1}{v^2}$ et que le premier terme est au moins en $\frac{1}{v^4}$ lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

1° La fonction y et sa dérivée y' sont continues ;

2° $\frac{d}{dt} \overline{yy_t}$ tend vers 0 lorsque t augmente indéfiniment.

3° $\overline{yy_t}$ et ses trois premières dérivées sont définies et bornées. Il s'ensuit que les deux intégrales :

$$\overline{y^2} = \int_0^\infty \overline{y_v^2} dv; \quad \overline{y'^2} = \int_0^\infty \overline{y_v'^2} dv$$

sont convergentes pour $v = \infty$.

Spectre d'intensité, lorsque la fonction de corrélation est inconnue au voisinage immédiat de $t = 0$. — Dans certains problèmes, la fonction de corrélation n'est pas connue dans

un très petit intervalle de temps $-t_0, +t_0$, autour de l'origine ⁽¹⁾. Ainsi dans le problème traité p. 34, la fonction de corrélation est sensiblement :

$$\overline{yy_t} = Ae^{-\alpha t} \text{ pour } t > t_0$$

et :

$$\overline{yy_t} = Ae^{+\alpha t} \text{ pour } t < t_0$$

Mais les approximations faites pour calculer $\overline{yy_t}$ ne sont pas valables lorsque $-t_0 < t < t_0$, et nous ne pouvons connaître la fonction de corrélation dans cet intervalle. Nous allons montrer que, moyennant quelques hypothèses très générales, on peut cependant calculer $\overline{y^2}$ pour toutes les fréquences beaucoup plus petites que $\frac{1}{2\pi t_0}$, les seules, d'ailleurs, qu'on puisse atteindre expérimentalement.

Nous poserons :

$$(43) \quad \overline{yy_t} = f(t) = f_1(t) + \varphi(t),$$

où $\varphi(t)$ est une fonction inconnue dont les dérivées varient rapidement dans l'intervalle $-t_0, +t_0$; mais on a sensiblement, quel que soit n :

$$(44) \quad \varphi^{(n)}(t) = 0, \quad \text{lorsque} \quad |t| \geq t_0.$$

$f_1(t)$, au contraire, est une fonction dont les différentes dérivées peuvent être discontinues au point $t = 0$, mais varient lentement dans l'intervalle $0, t_0$ (ce sera par exemple la fonction $Ae^{-\alpha |t|}$). On peut donc se contenter de l'approximation :

$$(45) \quad f_1^{(n)}(t) = f_1^{(n)}(t_0), \quad \text{lorsque} \quad 0 < t \leq t_0.$$

⁽¹⁾ L'intervalle de temps t_0 n'est pas accessible aux mesures, non plus que des fréquences aussi élevées que $\frac{1}{2\pi t_0}$ ($t_0 \div 10^{-10}$ sec., par exemple).

Nous supposerons en outre que la dérivée de $f(t)$ ne prend pas de valeurs anormalement grandes en valeur absolue dans l'intervalle $-t_0, +t_0$, mais que l'on a au contraire :

$$(46) \quad |f'(t)| \leq |f'_1(0)|,$$

c'est-à-dire, en se reportant aux équations qui précèdent :

$$(47) \quad |\varphi'(t)| \leq 2 |f'_1(0)|.$$

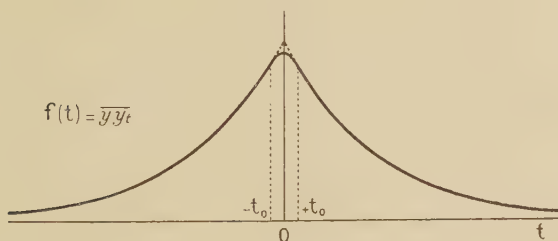


Fig. 2.

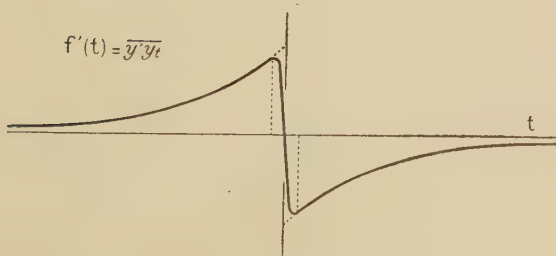


Fig. 3.

Enfin, nous supposerons que $f_1(t)$ est continue à l'origine, mais non sa dérivée première, c'est-à-dire que $f_1(t)$ présente une discontinuité du second ordre. Nous résumerons l'ensemble des conditions précédentes en disant que $\overline{y y_t}$ présente à l'origine une pseudo-discontinuité du second ordre, le terme « pseudo » indiquant qu'il s'agit d'une variation très rapide, mais non d'une discontinuité réelle, qui ne per-

mettrait pas le calcul mathématique. Les figures 2, 3 et 4 montrent l'allure de $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$ (f_1 , f'_1 , f''_1 en pointillé).

Lorsque la pseudo discontinuité est d'un ordre différent, on se ramène au cas précédent en considérant, au lieu de la fonction y , une de ses dérivées ou une de ses primitives.

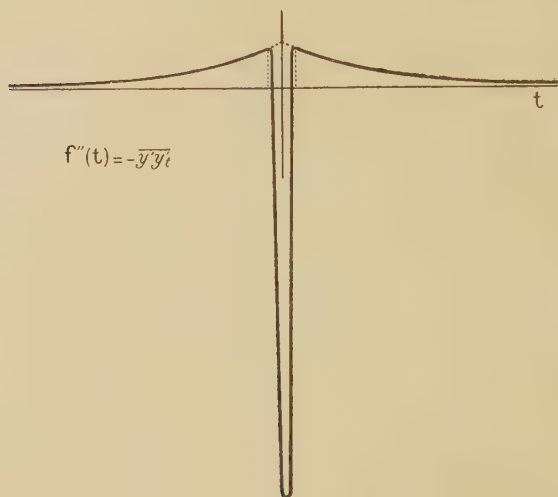


Fig. 4.

Le théorème de la page 10 ($f'(0) = 0$) nous donne :

$$(48) \quad f'_1(+0) = -\varphi'(+0).$$

1° Développement de $\overline{y}_v^2$ en $\frac{1}{v}$. — Nous allons chercher un développement valable lorsque v sera assez grand pour que $f_1(t)$ diffère peu de $f_1\left(t + \frac{1}{v}\right)$, bien que cependant $2\pi v$ soit beaucoup plus petit que $\frac{1}{t_0}$.

$$(49) \quad \overline{y}_v^2 = 4 \int_0^\infty f_1(t) \cos 2\pi v t \, dt + 4 \int_0^{t_0} \varphi(t) \cos 2\pi v t \, dt.$$

Le premier terme se développe comme plus haut ; si on suppose que $f'_1(\infty) = 0$, il est égal à :

$$-\frac{4f'_1(+0)}{\omega^2} + \frac{R'}{\omega^4}.$$

Le deuxième terme peut se calculer en appliquant deux fois le théorème des accroissements finis. Il est égal à :

$$4t_0\varphi(t_1) = 4t_0\varphi'(t_2) \quad (0 \leq t_1 \leq t_0 \quad \text{et} \quad 0 \leq t_2 \leq t_0),$$

puisque $\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = 0$. D'après la relation (47), il est inférieur en valeur absolue à $8t_0^2 |f'_1(0)|$. La condition

$t_0 \ll \frac{1}{2\pi\nu}$, nous montre qu'il est beaucoup plus petit que

$\frac{4 |f'_1(0)|}{\omega^2}$. Donc pour les fréquences mesurables le premier

terme du développement sera :

$$(50) \quad \overline{y_v^2} = \frac{4f'_1(+0)}{\omega^2}.$$

Notons que l'intégrale $\overline{y^2} = \int_0^\infty \overline{y_v^2} dv$ apparaît déjà comme convergente, lorsque ν augmente en restant dans le domaine des fréquences mesurables.

2° *Calcul de $\overline{y_v^2}$* . — Le calcul suivant s'applique à toute fréquence beaucoup plus petite que $\frac{1}{2\pi t_0}$, c'est-à-dire à toute fréquence mesurable (Cf. équation (8), p. 10).

$$(51) \quad \overline{y_v^2} = -4 \int_0^\infty [\varphi''(t) + f'_1''(t)] \cos 2\pi\nu t dt.$$

Le premier terme s'intègre seulement entre 0 et t_0 , intervalle où le cosinus peut être considéré comme constant et égal à 1. Tenant compte des relations (45) et (48), il vient :

$$(52) \quad \overline{y_v^{1/2}} = -4f_1'(0) - 4 \int_0^\infty f_1'' \cos 2\pi v t \, dt \quad (1).$$

Lorsque v devient très grand (tout en restant très inférieur à $\frac{1}{2\pi t_0}$), le second terme tend vers 0 comme $\frac{1}{v^2}$ (cf. p. 21); $\overline{y_v^{1/2}}$ tend donc vers la valeur constante $-4f_1'(0)$.

L'intégrale $\overline{y^{1/2}} = \int_0^\infty \overline{y_v^{1/2}} \, dv$ n'apparaît pas comme convergente dans le domaine des fréquences mesurables, mais seulement lorsqu'on dépasse suffisamment ces fréquences.

(1) Une intégration par partie de l'intégrale qui figure dans cette équation permet de retrouver l'équation :

$$\overline{y_v^{1/2}} = \omega^2 \int_0^\infty f_1 \cos 2\pi v t \, dt = \omega^2 \overline{y_v^2}.$$

CHAPITRE III

Applications en électricité de la notion de corrélation.

Lorsqu'on étudie des courants qui ne peuvent être représentés par une somme de fonctions périodiques, les notions habituelles d'inductance et de capacitance, perdent leur sens puisque ces grandeurs dépendent de la fréquence et que la notion de fréquence pour ces courants demande à être précisée. La notion de corrélation va nous permettre de définir l'impédance d'une façon très générale.

Impédance. — Soit un circuit électrique complexe renfermant des selfs, capacités, résistances, inductions mutuelles, etc... Nous supposons seulement que le système obéit à une équation différentielle linéaire. Dans une branche AB du circuit on applique une force électromotrice E satisfaisant aux conditions (A) ainsi que les différentes dérivées dont nous aurons besoin. L'intensité I dans la branche AB sera donnée par une relation telle que :

$$(1) \quad \sum_k A_k \frac{d^k I}{dt^k} = \sum_k B_k \frac{d^k E}{dt^k} \quad (1),$$

où k est un entier qui peut être positif, négatif (primitive) ou nul.

(1) Dans cette équation, I et E peuvent représenter des grandeurs de toute autre nature. Les conclusions de ce paragraphe restent valables.

Formons cette équation au temps t_0 et au temps $t_0 - t$, multiplions membre à membre, et prenons la moyenne par rapport à t_0 ; puis multiplions chaque terme par $2e^{2\pi i \nu t} dt$ et sommions entre $-\infty$ et $+\infty$. Les théorèmes de la page 19 donnent :

$$(2) \quad \overline{I_v^2} \sum_p (-1)^{\frac{k-l}{2}} \omega^{k+l} A_k A_l = \overline{E_v^2} \sum_p (-1)^{\frac{k-l}{2}} \omega^{k+l} B_k B_l$$

Σ_p n'est étendue qu'aux termes pour lesquels $k + l$ est pair. Lorsque $k \neq l$, chaque couple (k, l) est compté deux fois.

Nous appellerons carré de l'impédance le rapport :

$$(3) \quad Z_v^2 = \frac{\overline{E_v^2}}{\overline{I_v^2}},$$

on a :

$$(4) \quad Z_v^2 = \frac{\sum_p (-1)^{\frac{k-l}{2}} \omega^{k+l} A_k A_l}{\sum_p (-1)^{\frac{k-l}{2}} \omega^{k+l} B_k B_l}.$$

L'impédance ainsi définie est bien la même que l'impédance présentée par le circuit pour une force électromotrice sinusoïdale de pulsation ω . En effet, le même calcul refait en posant $E = E_0 \sin \omega t$ donne la même valeur pour le rapport $\frac{\overline{E^2}}{\overline{I^2}}$.

Pente d'un amplificateur. — L'équation d'un amplificateur est la même que celle d'une impédance. La seule différence est que lorsque E représente la tension à l'entrée de l'amplificateur, I représente l'intensité à la sortie, tandis que dans le paragraphe précédent, l'intensité I était mesurée dans la branche même où était appliquée la force électromotrice E . Nous supposons donc toujours que l'amplificateur satisfait

à une équation linéaire du type 1 (1). Nous appellerons carré de la pente pour la fréquence ν le rapport :

$$P_{\nu}^2 = \frac{\overline{I_{\nu}^2}}{\overline{E_{\nu}^2}}.$$

Nous avons donc :

$$(5) \quad P_{\nu}^2 = \frac{\sum_p (-1)^{\frac{k-l}{2}} \omega^{k+l} B_k B_l}{\sum_p (-1)^{\frac{k-l}{2}} \omega^{k+l} A_k A_l}.$$

La pente P_{ν} pourra se déterminer expérimentalement en appliquant à l'entrée de l'amplificateur une tension sinusoïdale connue de fréquence ν .

On aura pour le courant total :

$$(6) \quad \overline{I^2} = \int_0^{\infty} P_{\nu}^2 \overline{E_{\nu}^2} d\nu.$$

Bande passante efficace. — Lorsque $\overline{E_{\nu}^2}$ est indépendant de la fréquence, c'est-à-dire, dans le cas de phénomènes de fluctuation, lorsque la corrélation est infiniment brève, on peut le faire sortir du signe somme :

$$(7) \quad \overline{I^2} = \overline{E_{\nu}^2} \int_0^{\infty} P_{\nu}^2 d\nu.$$

Avec un amplificateur sélectif, P_{ν}^2 a un maximum très prononcé pour une fréquence ν_0 . Nous poserons :

$$(8) \quad F = \int_0^{\infty} \frac{P_{\nu}^2}{P_{\nu_0}^2} d\nu$$

(1) Cette condition conduit en pratique à vérifier que l'appareil ne présente pas de distorsion en fonction de l'intensité, c'est-à-dire que I est bien proportionnel à E lorsqu'on attaque l'appareil par une force électromotrice sinusoïdale de fréquence invariable.

et nous appellerons F la *bande passante efficace* ⁽¹⁾ de l'amplificateur. Nous aurons donc l'équation :

$$\overline{I^2} = \overline{E_v^2} P_{v_0}^* F.$$

En pratique on se sert souvent d'amplificateurs à bande passante étroite. Si $\overline{E_v^2}$ ne varie pas beaucoup dans l'intervalle de fréquences où l'amplification est notable, il sera encore légitime de le faire sortir du signe somme.

La bande passante efficace peut se déterminer expérimentalement en traçant la courbe qui donne $\overline{I^2}$ en fonction de la fréquence pour une même tension sinusoïdale à l'entrée, et en déterminant empiriquement la surface de cette courbe que l'on divise par l'ordonnée maximum.

Lorsque l'équation différentielle de l'appareil est connue, F peut se calculer mathématiquement.

Si par exemple l'équation est du second ordre (h étant un coefficient d'amplification),

$$(9) \quad L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = hE$$

$$(10) \quad F = \int_0^\infty \frac{R^2 dv}{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right)^2} = \frac{R}{4L}.$$

(1) La bande passante efficace définit une sorte de « largeur spectrale équivalente » qui serait celle d'un appareil à sensibilité « crénelée » dont la pente est P_{v_0} dans l'intervalle ainsi défini, et nulle en dehors de cet intervalle.

CHAPITRE IV

Fluctuations thermiques de potentiel aux bornes d'une résistance en l'absence de courant.

Etude thermodynamique. — Les expériences de Johnson (4) ont montré qu'en l'absence de courant permanent une résistance quelconque est le siège d'une force électromotrice désordonnée due à l'agitation thermique. Nyquist (5) établit par un raisonnement thermodynamique la formule suivante :

$$(1) \quad \overline{e_v^2} = 4RkT.$$

On peut retrouver cette formule en appliquant l'équation d'Einstein :

$$(2) \quad \frac{1}{2} \overline{CV^2} = \frac{1}{2} kT$$

à un circuit constitué par une capacité C et une résistance non inductive R en parallèle. En effet l'équation différentielle d'un tel circuit est :

$$(3) \quad RC \frac{dV}{dt} + V = e$$

en appelant e la force électromotrice désordonnée dont la résistance est le siège. La corrélation sur e est infiniment brève et par suite e_v^2 est indépendant de la fréquence, tant que $\nu \ll \frac{1}{2\pi t_0}$, où t_0 est extrêmement petit (1).

(1) Un circuit quelconque présente toujours de la self. Soit donc L la self du circuit ; une étude plus approfondie montre que nos conclusions ne sont vraies que si :

$$2\pi\nu \ll \frac{R}{L}.$$

Le temps t_0 qui figure ici n'est donc autre que $\frac{L}{R}$.

Nous allons faire le calcul par deux méthodes différentes.

Première méthode. — L'équation (2) (ch. III, p. 30) appliquée aux variables V et e donne :

$$(4) \quad \overline{V^2} = \frac{\overline{e_v^2}}{1 + C^2 R^2 \omega^2}$$

d'où :

$$\overline{V^2} = \int_0^\infty \frac{\overline{e_v^2}}{1 + C^2 R^2 \omega^2} d\nu = \frac{\overline{e_v^2}}{4CR}$$

ou en identifiant à l'équation (2) :

$$\overline{e_v^2} = 4RkT.$$

Deuxième méthode ⁽¹⁾. — Revenons à l'équation (3) prise à l'instant t_1 et multiplions-la membre à membre par la même équation formée à instant $t_1 - t$, en prenant la valeur moyenne par rapport à t_1 , et tenant compte des théorèmes sur les dérivées des fonctions de corrélation (p. 8). Il vient :

$$(5) \quad -C^2 R^2 \frac{d^2 \overline{VV}_t}{dt^2} + \overline{VV}_t = \overline{ee}.$$

Bornons notre calcul au cas où $|t| > t_0$. Dans ce cas :

$$\overline{ee_t} = 0.$$

Nous adopterons les notations de la page 24 :

$$(6) \quad \overline{VV}_t = f_1(t) + \varphi(t).$$

On peut prendre pour f_1 une solution de l'équation différentielle :

$$(7) \quad -C^2 R^2 \frac{d^2 f_1}{dt^2} + f_1 = 0$$

⁽¹⁾ Cette méthode entraîne à des calculs plus longs, mais a l'avantage de nous donner l'expression de la fonction de corrélation pour les temps mesurables.

dont la solution générale est :

$$f_1 = A e^{-\frac{t}{CR}} + B e^{+\frac{t}{CR}}.$$

Si nous joignons les conditions :

$$f_1(\infty) = 0; \quad f_1(t) = f_1(-t),$$

il vient :

$$\begin{aligned} f_1(t) &= A e^{-\frac{t}{CR}} && \text{pour } t > 0 \\ f_1(t) &= A e^{+\frac{t}{CR}} && \text{pour } t < 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire que pour $t > 0$, on a sensiblement :

$$f_1(t) = \overline{V^2} e^{-\frac{t}{CR}}.$$

Mais $\overline{V^2}$ est donné par l'équation (2). On a donc :

$$(8) \quad f_1(t) = \frac{kT}{C} e^{-\frac{t}{CR}}.$$

Portons cette valeur dans l'équation de définition de $\overline{V_v^2}$.
Pour toute fréquence mesurable, on aura :

$$\overline{V_v^2} = 4 \int_0^\infty f_1 \cos 2\pi \nu t \, dt = \frac{4kT}{C} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{CR}} \cos 2\pi \nu t \, dt$$

ou enfin :

$$(9) \quad \overline{V_v^2} = \frac{4RkT}{1 + C^2 R^2 \omega^2}$$

équation donnée par J. B. Johnson.

On peut considérer $\overline{e_v^2}$ comme la limite de $\overline{V_v^2}$ lorsque C tend vers 0, puisque la force électromotrice est égale à la diffé-

rence de potentiel aux bornes du générateur en circuit ouvert; on a alors :

$$\overline{e_v^2} = 4RkT.$$

On peut aussi multiplier chaque membre de l'équation (5) par $4 \cos 2\pi\nu t dt$ et intégrer entre 0 et ∞ . Il vient :

$$C^2 R^2 \overline{V_v^2} + \overline{V_v^2} = \overline{e_v^2}$$

et en se servant des équations (44) et (47), chap. II, p. 25 :

$$\overline{e_v^2} = -4C^2 R^2 f_1'(0) + 4 \int_0^\infty (f_1 - C^2 R^2 f_1'') \cos 2\pi\nu t dt.$$

Le second terme est nul en vertu de l'équation (7); en remplaçant dans le premier terme f_1 par $\frac{kT}{C} e^{-\frac{t}{CR}}$, on retrouve

$$\overline{e_v^2} = 4RkT.$$

Théorie électronique. — La thermodynamique, par l'intermédiaire de l'équation d'Einstein nous a permis de calculer la grandeur des fluctuations thermiques de potentiel aux bornes d'une résistance, en l'absence de courant permanent. Le résultat doit être indépendant du mécanisme envisagé pour la conductibilité, pourvu que ce mécanisme soit conforme aux principes de la thermodynamique. Nous allons ici faire le calcul en adoptant la statistique classique avec la méthode de calcul due à Lorentz, puis la statistique de Fermi, avec la méthode de calcul due à Sommerfeld et L. Brillouin.

Première méthode de calcul. — Considérons un conducteur fermé de section uniforme S et de longueur L dont on puisse négliger la self vis-à-vis de la résistance pour les fréquences étudiées.

Si on considère la section droite S de ce conducteur, la quantité d'électricité q qui passe à travers cette section n'est nulle qu'en moyenne, en l'absence de champ extérieur. En

effet, par suite de l'agitation thermique, des électrons traversent constamment cette section dans les deux sens.

Nous pouvons définir l'intensité I dans le circuit par le quotient $\frac{q(t + \theta_0) - q(t)}{\theta_0}$, où θ_0 est une unité de temps arbitraire très petite à notre échelle (petite en particulier par rapport à la période de l'appareil qui sert à mesurer I), mais grande par rapport aux temps microscopiques tels que le temps qui sépare deux chocs électroniques successifs.

Calculons $\bar{\Pi}_\tau$. A notre échelle de temps, la corrélation moléculaire est négligeable ; il n'y a donc corrélation que si les deux intervalles de temps $(t - \theta_0, t)$ et $(t - \tau - \theta_0, t - \tau)$ ont une partie commune.

Donc :

$$(10) \quad \bar{\Pi}_\tau = 0, \text{ si } \tau > \theta_0.$$

Si $\tau < \theta_0$, nous écrirons :

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\Pi}_\tau &= \frac{1}{\theta_0^2} \frac{[q(t) - q(t - \tau) + q(t - \tau) - q(t - \theta_0)]}{[q(t - \tau) - q(t - \theta_0) + q(t - \theta_0) + q(t - \tau - \theta_0)]}. \end{aligned} \right.$$

Nous n'avons à conserver que la partie commune dans les deux crochets :

$$(12) \quad \bar{\Pi}_\tau = \frac{1}{\theta_0^2} [q(t - \tau) - q(t - \theta_0)]^2.$$

Puisque la corrélation est infiniment brève nous pourrions écrire en tenant compte de la relation (36), p. 20 :

$$(13) \quad \bar{I}_v = 4 \int_0^{\theta_0} \bar{\Pi}_\tau d\tau.$$

Pour calculer le carré moyen qui figure dans le second membre de l'équation (12), considérons, pendant l'intervalle de temps $(t - \tau, t - \theta_0)$, toutes les trajectoires électroniques élémentaires de même vitesse v en grandeur et direction

(à dv et $d\varphi$ près) et de même longueur x (à dx près). La charge qui a traversé la section S du conducteur du fait de ces trajectoires est, si on appelle d_1N leur nombre dans le conducteur entier et φ l'angle de leur vitesse avec l'axe du conducteur :

$$d_1q = \frac{ex \cos \varphi}{L} d_1N$$

ce qui donne, pour l'écart à partir de la moyenne, un carré moyen :

$$\overline{\delta_1 q^2} = \frac{e^2 x^2 \cos^2 \varphi}{L^2} d_1N \quad (1).$$

Les trajectoires considérées sont indépendantes. Nous allons donc pouvoir effectuer diverses sommations.

Une première sommation pour toutes les valeurs de φ nous donne :

$$\overline{d_2 q^2} = \frac{e^2 x^2}{3L^2} d_2N.$$

Une seconde sommation pour toutes les valeurs de x nous donne :

$$\overline{d_3 q^2} = \frac{2e^2 l^2}{3L^2} d_3N \quad (2)$$

(¹) Soit en effet à calculer le carré moyen de la somme de n quantités u_i dont la valeur moyenne est nulle et qui sont indépendantes les unes des autres, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} u_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{u_i^2} + 2 \sum_{i \neq j} u_i u_j.$$

Le second terme donne une valeur moyenne nulle et le premier terme a évidemment pour moyenne $n\overline{u^2}$;

donc :

$$\left(\sum u_i \right)^2 = n\overline{u^2}.$$

(²) On sait en effet que si la répartition des longueurs de trajectoire est exponentielle, on a

$$\overline{x^2} = 2l^2.$$

où l est le libre parcours moyen pour la vitesse v ; d^3N représente le nombre de trajectoires électroniques ayant dans tout le conducteur la vitesse v , à dv près, pendant l'intervalle $(t - \tau, t - \theta_0)$. Il résulte de la définition du libre parcours moyen que ce nombre est $\frac{v(\theta_0 - \tau)}{l} dN$, en appelant dN le nombre d'électrons libres, dans tout le conducteur, ayant la vitesse v à dv près, en grandeur seulement :

$$(14) \quad \overline{d_3 q^2} = \frac{2e^2 v l}{3L^2} (\theta_0 - \tau) dN.$$

Si on appelle $fd\xi d\eta d\zeta$ le nombre d'électrons libres, par unité de volume, dont les composantes de vitesse sont comprises entre ξ et $\xi + d\xi$, η et $\eta + d\eta$, ζ et $\zeta + d\zeta$, on a :

$$(15) \quad dN = 4\pi v^2 SL f dv.$$

En effectuant une dernière intégration pour toutes les vitesses, il vient :

$$(16) \quad \overline{[q(t-\tau) - q(t-\theta_0)]^2} = \frac{8\pi e^2}{3} \frac{S}{L} (\theta_0 - \tau) \int_0^\infty l v^3 f dv$$

Portons cette valeur dans les équations (12) et (13), il vient :

$$(17) \quad \overline{I_v^2} = \frac{32\pi e^2}{3} \frac{S}{L} \int_0^{\theta_0} \frac{\theta_0 - \tau}{\theta_0^2} d\tau \int_0^\infty l v^3 f dv$$

$$(18) \quad \overline{I_v^2} = \frac{16\pi e^2}{3} \frac{S}{L} \int_0^\infty l v^3 f dv.$$

L'intégrale ci-dessus se retrouve dans la théorie de la conductibilité. On a en effet (L. Brillouin, *Statistiques quantiques*, p. 206) l'expression suivante de la conductivité :

$$(19) \quad \sigma = -\frac{4\pi e^2}{3m} \int_0^\infty l v^2 \frac{\partial f}{\partial v} dv.$$

En statistique classique :

$$(20) \quad f = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$(21) \quad \frac{\partial f}{\partial v} = - \frac{mv}{kT} f$$

d'où :

$$(22) \quad \sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{4\pi e^2}{3kT} \int_0^\infty v^3 f dv$$

ou en portant dans l'équation (18) :

$$(23) \quad \bar{I}_v^2 = 4 \frac{S}{\rho L} kT = \frac{4kT}{R}.$$

Or pour ce produit particulier on a $e_v^2 = \bar{I}_v^2 R^2$, si l'on appelle e la force électromotrice de fluctuation ; d'où :

$$e_v^2 = 4RkT,$$

équation qui est celle de Nyquist.

Statistique de Fermi-Dirac. — En statistique quantique il n'y a pas indépendance entre les différentes cases d'extension en phase. Soit F le nombre moyen d'électrons situés dans une case de grandeur h^3 . L. Brillouin a montré que, si on pose $dN = \bar{dN} + dm$ pour un élément d'extension en phase de grande dimension par rapport à h^3 , on a :

$$(24) \quad \bar{dm}^2 = (1 - F)dN,$$

au lieu de la formule classique :

$$(25) \quad \bar{dm}^2 = dN.$$

Il faudra donc, dans la formule (14), multiplier le second membre par $(1 - F)$;

on aura :

$$(26) \quad \bar{I}_v^2 = \frac{16\pi e^2}{3} \frac{S}{L} \int_0^\infty v^3 f(1 - F) dv,$$

mais ici :

$$(27) \quad F = \frac{1}{e^{-\alpha + \frac{mv^2}{2kT}} + 1}$$

et

$$(28) \quad f = AF.$$

On vérifie aisément que :

$$(29) \quad -\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{mv}{kT} f(1 - F).$$

En portant cette valeur dans l'expression de la conductivité et comparant avec l'équation (26), on retrouve la formule :

$$\overline{e_v^2} = 4RkT.$$

Deuxième méthode de calcul. — On peut retrouver ces résultats par une méthode toute différente. L'intensité moyenne n'aura plus la même définition. Nous considérerons chaque trajectoire élémentaire comme un élément de courant et l'intensité instantanée dans une portion du conducteur sera la résultante de tous ces courants élémentaires.

Soit un élément de longueur dx dans un conducteur de section S . Nous allons calculer le courant di suivant la direction Ox à l'intérieur de cet élément en supposant qu'il n'est soumis à aucun champ extérieur.

Appelons $f(v)Sdx d\Omega$ le nombre d'électrons contenus dans cet élément de volume et dont les composantes de vitesse sont comprises entre ξ et $\xi + d\xi$, η et $\eta + d\eta$, ζ et $\zeta + d\zeta$ ($d\Omega = d\xi d\eta d\zeta$). Un électron dont la vitesse v fait l'angle φ avec la direction Ox est équivalent à un élément de courant de longueur dx dont la projection sur Ox est $\delta i dx = ev \cos \varphi$. Le carré moyen du courant sera donc :

$$(30) \quad \overline{di^2} = Sdx \int \frac{e^2 v^2 \cos^2 \varphi}{dx^2} f(v) d\Omega.$$

D'autre part, d'après la définition du libre parcours, on a :

$$(31) \quad \overline{di di \tau} = \overline{di^2} e^{-\frac{v\tau}{l}} \quad (1)$$

pour un groupe de particules ayant toutes même vitesse en grandeur et direction. D'où :

$$(32) \quad \overline{di_v^2} = 4 \frac{S}{dx} \int_0^\infty f(v) e^2 v^2 \cos^2 \varphi \, d\Omega \int_0^\infty e^{-\frac{v}{l} \tau} \, d\tau$$

pour toutes les fréquences telles que $v \ll \frac{v}{l}$. Les fréquences qui peuvent être étudiées au moyen des amplificateurs satisfont toujours à cette condition.

On peut séparer l'intégrale $\int_v^{v+dv} \cos^2 \varphi \, d\Omega$ qui est égale à $\frac{4\pi v^2 dv}{3}$. D'où :

$$(33) \quad \overline{di_v^2} = \frac{16\pi e^2}{3} \frac{S}{dx} \int_0^\infty l v^3 f dv.$$

Nous retrouvons la même intégrale que page 39, équation (18). Le calcul s'achève donc comme précédemment et donne, tant en statistique classique qu'en statistique quantique :

$$(34) \quad \overline{di_v^2} = 4 \frac{kT}{dR}.$$

Puisque nous avons fait abstraction du reste du circuit, nous devons considérer notre élément de conducteur comme soumis uniquement à la force électromotrice de fluctuation.

(1) La définition du libre parcours adoptée par Lorentz est la suivante : soit un groupe de dn électrons de même vitesse à l'instant t ; à l'instant $t + \tau$, il sera devenu :

$$dn(t) e^{-\frac{v\tau}{l}}$$

d'où :

$$\overline{dndn\tau} = \overline{dn^2} e^{-\frac{v\tau}{l}}.$$

On a :

$$(35) \quad \overline{de_v^2} = \overline{di_v^2} dR^2,$$

et par suite :

$$(36) \quad \overline{de_v^2} = 4kTdR.$$

Cette méthode de calcul a l'avantage de faire apparaître la force électromotrice de fluctuation comme une grandeur locale, et d'être par conséquent valable pour un circuit de forme quelconque et de température non uniforme.

DEUXIÈME PARTIE

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES FLUCTUATIONS DE POTENTIEL AUX BORNES D'UN CONDUCTEUR DE FAIBLE VOLUME PARCOURU PAR UN COURANT

Sommaire. — Lorsqu'un conducteur de faible volume et de résistance relativement élevée est parcouru par un courant, il se produit aux bornes une fluctuation de potentiel dont la grandeur dépend de l'intensité du courant. J'ai étudié à ce sujet différentes résistances constituées par des couches métalliques minces; j'ai déterminé la répartition en fréquence du carré moyen $\overline{e_v^2}$ de la force électromotrice de fluctuation pour différentes valeurs du courant. La gamme des fréquences étudiées s'étend de 96 à 162.000 cycles.

L'expérimentation a porté sur trois dépôts : deux de tungstène appelés dépôts A et B, et un de platine recuit, appelé dépôt C. Pour tous les trois, $\overline{e_v^2}$ varie à peu près en raison inverse de la fréquence dans une région étendue de fréquences. Cette loi de variation indique que la corrélation sur e est de l'ordre des périodes étudiées et nous donne donc un renseignement précieux pour l'étude du mécanisme de ces fluctuations.

D'autre part, pour une fréquence donnée, $\overline{e_v^2}$ varie proportionnellement au carré de l'intensité, lorsque l'intensité est faible, puis croît moins vite que ce carré, lorsque l'intensité devient suffisamment grande. Ce dernier effet est particulièrement marqué avec le dépôt A pour lequel $\overline{e_v^2}$ varie presque

proportionnellement à l'intensité, lorsque cette dernière a dépassé une certaine valeur. La théorie quantique de ces fluctuations, faite par Léon Brillouin (8) à la suite de mes premières expériences, prévoit une variation de $\overline{e^2}$, proportionnelle au carré de l'intensité tant que la vitesse moyenne de diffusion des électrons est petite par rapport à la vitesse quadratique moyenne d'agitation thermique. Il semble donc que cette condition ne soit pas réalisée dans les couches minces avec les plus fortes intensités employées. On doit par conséquent prévoir des écarts à la loi d'Ohm, car l'établissement de cette loi exige les mêmes hypothèses. De tels écarts ont été effectivement observés avec le dépôt A.

CHAPITRE PREMIER

Appareils.

L'appareillage se compose essentiellement d'une boîte d'entrée comprenant les résistances à étudier et les piles, d'un amplificateur, d'un couple dans le vide et d'un galvanomètre. En outre, un oscillateur est relié à la boîte d'entrée par l'intermédiaire d'un réducteur de tension afin de mesurer la sensibilité de l'ensemble. Je dispose de deux amplificateurs : l'un permettant de couvrir la gamme de 96 cycles-10 000 cycles, l'autre allant de 18 à 162 kilocycles.

Boîte d'entrée. — Le schéma de montage est donné par la figure 5. La mesure du courant continu se fait soit au moyen du voltmètre V placé aux bornes du circuit d'utilisation dont la résistance est mesurée au préalable au pont de Wheatstone, soit au moyen du milliampèremètre M. En haute fréquence le courant est réglable de façon continue au moyen du rhéostat T. Des capacités de 50 microfarads environ placées aux bornes du voltmètre et du milliampèremètre se comportent comme un court-circuit pour les courants de haute fréquence. En basse fréquence cependant, il est préférable de court-circuiter le rhéostat, car la capacité de 50 microfarads est insuffisante pour supprimer son influence de façon certaine. On agit sur l'intensité en faisant varier le nombre d'éléments de la pile au moyen du commutateur C₂. La position de courant nul remplace la pile par un court-circuit.

Le commutateur C_1 permet de brancher les différentes résistances étudiées. En basse fréquence, le retour du courant à la pile est assuré par la résistance bobinée R' . En haute fréquence au contraire, le retour du courant se fait par la self du premier circuit accordé de l'amplificateur.

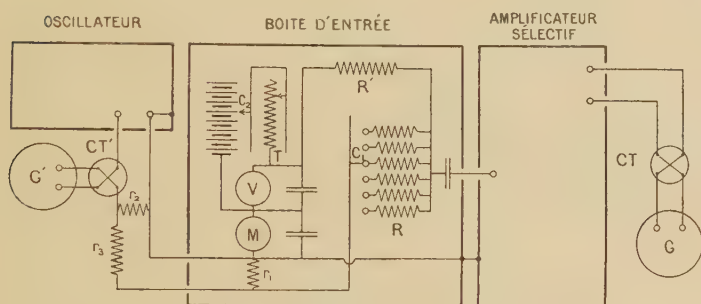


Fig. 5.

Couple et galvanomètre. — Les couples utilisés (CT) sont constitués par deux fils fins tendus en croix dans le vide, respectivement de fer et de constantan. Le courant à détecter traverse un secteur (un secteur fait environ 25 ohms) ; l'autre secteur est relié au cadre de basse résistance (6 ohms) d'un galvanomètre Hartmann et Braun de grande sensibilité G . La période du galvanomètre est rendue aussi longue que possible, en chargeant l'équipage avec deux petites boules de laiton (environ 20 secondes). L'amortissement est nettement supérieur à l'amortissement critique. De la sorte la stabilité du spot est plus grande, le carré moyen du courant étant déterminé pour un temps plus long.

Oscillateur et réducteur de tension. — La force électromotrice de fluctuation à mesurer est comparée à une tension sinusoïdale connue fournie par un oscillateur qui peut produire toute fréquence comprise entre 80 et 800.000 cycles. Le courant sinusoïdal fourni par l'oscillateur traverse un couple

CT' relié à un galvanomètre G', puis un réducteur de tension composé de résistances sans inductance et sans capacité r_1 , r_2 et r_3 . L'ensemble du couple et du galvanomètre a été au préalable étalonné au moyen d'un courant continu que l'on fait passer successivement dans les deux sens. La déviation moyenne est alors la même qu'avec un courant alternatif de même intensité efficace.

La tension aux bornes de la résistance r_1 (qui est plus de 10.000 fois plus petite que $R + R'$) peut se calculer lorsqu'on connaît l'intensité dans le couple et les valeurs des diverses résistances du réducteur de tension.

Amplificateur BF. — Il se compose d'un préamplificateur à deux lampes, d'un amplificateur sélectif et d'un amplifica-

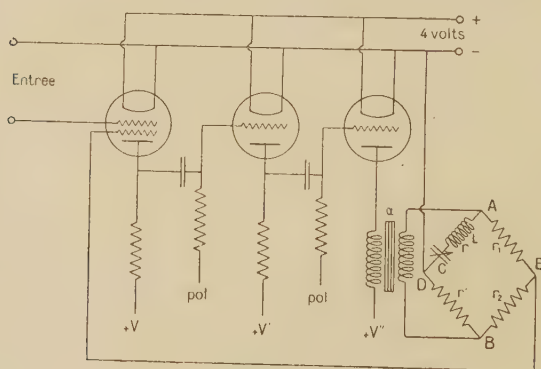


Fig. 6

teur de puissance à deux lampes dont la dernière, une pentode, est branchée sur un transformateur abaisseur de tension relié au couple.

L'amplificateur sélectif est un amplificateur à pont dont le principe est dû à L. Brillouin et M. Lévy (10) et que j'ai construit sur les indications de M. Lévy. J'en rappelle brièvement le fonctionnement (fig. 6).

La tension à amplifier est appliquée à l'une des grilles d'une lampe bigrille, première lampe d'un amplificateur à résistances. Sur le circuit plaque de la dernière triode se trouve le primaire d'un transformateur dont le secondaire alimente un pont dont trois branches sont constituées par des résistances sans self et sans capacité et la quatrième par un circuit oscillant série. La tension fournit par la diagonale ED du pont est appliquée à la deuxième grille de la lampe bigrille d'entrée.

Si on appelle i l'intensité dans la branche AD du pont qui contient le circuit oscillant, L la self-induction et C la capacité de ce circuit, on peut démontrer la relation suivante ⁽¹⁾ :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = h \frac{de}{dt}$$

h est un facteur assez complexe dépendant des divers coefficients d'amplification et du réglage du pont ; la résistance effective R peut se mettre sous la forme :

$$R = r + \lambda$$

où r est la résistance ohmique de la branche AD et λ une quantité indépendante de r qui dépend des divers coefficients d'amplification et qu'un réglage du pont peut rendre à volonté positif ou négatif.

L'amplificateur est donc équivalent à un circuit oscillant fictif de self L , de capacité C et de résistance R . On démontre que la bande passante efficace F d'un tel circuit est $\frac{R}{4L}$. (Pour l'appareil réalisé, $L = 0,5$ henry ; R peut varier de 10 à 200 ohms ; F varie donc de 5 à 100 cycles).

On peut réaliser une résistance effective R donnée à l'avance de la façon suivante. Après avoir court-circuité l'entrée et branché la sortie sur un haut-parleur, on règle l'ap-

(1) Pour une étude plus complète de cet appareil et de diverses particularités de ce montage, voir *Revue Générale d'Electricité*, t. XXXIX, 1936, p. 339.

pareil à l'accrochage exact en agissant sur une résistance placée en série avec le circuit oscillant. Cette résistance peut varier d'une façon continue et le point d'accrochage peut se déterminer à 0,1 ohm près. On intercale ensuite dans le même circuit une résistance sans self ni capacité de valeur R .

Il ne reste plus qu'à transmettre au reste de l'amplificateur une tension proportionnelle à i . Pour cela le point B est connecté à la grille de la lampe qui suit l'amplificateur sélectif. La tension en B est en effet égale à ir' , puisque la grille connectée en E ne consomme pas.

L'amplificateur H. F. — L'amplificateur H. F. est du type changeur de fréquence (ou superhétérodyne). Il se compose de deux lampes haute fréquence, une oscillatrice, une binode changeuse de fréquence et deux lampes basse fréquence donnant une amplification sélective sur 1 480 cycles. Le circuit plaque de la dernière lampe comprend le primaire d'un transformateur abaisseur de tension de rapport 20 dont le secondaire est fermé sur le couple. L'appareil comporte deux gammes de fréquence : l'une de 16 à 44 kilocycles, l'autre de 60 à 162 kilocycles.

Vérifications. — J'ai naturellement vérifié à l'aide de l'oscillateur le fonctionnement correct des deux amplificateurs. La déviation du galvanomètre doit être proportionnelle au carré de la force électromotrice d'entrée. De plus, avec l'appareil B. F., la déviation doit être proportionnelle à $\frac{1}{R}$ lorsqu'il s'agit d'une tension de fluctuation et à $\frac{1}{R^2}$ lorsqu'il s'agit d'une force électromotrice sinusoïdale accordée sur la fréquence de sélection. Ces vérifications se sont révélées satisfaisantes à 1 0/0 près au moins.

Mesure de la bande passante du filtre B. F. de l'amplificateur H. F. — J'opère par comparaison avec l'amplificateur B. F. à pont. Je mesure une même tension de fluctuation d'une

part avec l'amplificateur à pont et une largeur de bande connue (100 cycles) sur la fréquence de 1 480 cycles, d'autre part avec la partie B. F. seule de l'amplificateur H. F. Connaissant $\overline{e_v^2}$, la formule (1), p. 51, donne F. La moyenne de plusieurs mesures a donné :

$$F = 433 \text{ cycles,}$$

les écarts observés laissent prévoir une précision de 1 o/o.

Equation de mesure des fluctuations. — Le phénomène de fluctuation se traduit par l'apparition d'une force électromotrice e dans la résistance R. La déviation du galvanomètre, proportionnelle au carré du courant de sortie, peut donc s'écrire sous la forme :

$$\gamma = \int_0^\infty G^2(\nu) \overline{e_\nu^2} d\nu.$$

Lorsqu'on remplace la pile P par un court-circuit, la force électromotrice de fluctuation disparaît ; mais on peut faire apparaître dans la même branche du circuit une force électromotrice sinusoïdale e_0 , en faisant fonctionner l'oscillateur sur la fréquence ν_0 correspondant au maximum de $G(\nu)$:

$$\gamma_0 = G^2(\nu_0) e_0^2.$$

On règle la sélectivité de l'appareil en sorte que $\overline{e_\nu^2}$ soit pratiquement constant dans toute la région de fréquences où $G^2(\nu)$ a une valeur notable. On aura donc :

$$(1) \quad \overline{e_\nu^2} = \frac{\gamma_0 e_0^2}{\gamma_0 F}$$

en posant :

$$F = \int_0^\infty \frac{G^2(\nu)}{G^2(\nu_0)} d\nu,$$

F est la bande passante efficace de tout l'appareil.

CHAPITRE II

Les dépôts.

Résistances de Løwe. — Les premières couches minces étudiées furent des dépôts commerciaux, fabriqués par la maison *Løwe-Radio*. Leur apparence est celle d'un dépôt noirâtre sur une tige de verre renfermée dans un tube scellé. Leur mode d'obtention ne m'est pas connu ; mais l'analyse chimique a montré que ce sont des dépôts de tungstène ⁽¹⁾.

Dépôts métalliques faits au laboratoire. — André Féry, assistant au laboratoire, a bien voulu fabriquer à mon intention, par projection cathodique dans l'air, des dépôts de platine et d'or suivant la technique qu'il a mise au point ces dernières années (11). Les tubes utilisés ont la même forme que ceux qui lui ont servi à étudier la résistivité du platine en couche mince. La seule différence réside dans les dimensions du dépôt, qui a 4 cm. de longueur et 1 mm. de largeur. Des caches en verre protègent la tranche de la lame-support pendant la projection. Ils sont tenus en place par de très faibles ressorts de nickel. Il suffit de renverser le tube et de le frapper légèrement pour faire tomber les caches. Naturellement, après la projection en milieu rigoureusement anhydre, le vide est fait dans le tube, avant de procéder à l'étude des fluctuations.

⁽¹⁾ Je remercie vivement mon camarade Amiel, qui a bien voulu se charger de cette analyse ; cette dernière est délicate, à cause de la très faible quantité de métal contenue dans chacun de ces dépôts.

Je rappelle que, d'après Féry, le platine obtenu par projection cathodique dans l'air à la température ordinaire n'a pas les propriétés du platine usuel. Féry lui a donné le nom de platine noir. La transformation en platine blanc, dont les propriétés électriques en couche épaisse (résistance et coefficient de température) sont sensiblement celles du métal habituel, se fait par recuit au-dessus de 340° .

Lorsque les couches minces ne sont pas recuites, l'étude à l'amplificateur montre que le passage d'un courant provoque des crachements irréguliers, qui rendent impossible toute étude quantitative des fluctuations.

Une résistance de platine recuit a été obtenue en maintenant pendant plusieurs jours à 360° C. un dépôt de platine noir dont la résistance était avant recuit de 10^{10} ohms. La résistance s'est abaissée aux environs de 30000 ohms.

Il est essentiel de faire observer qu'un tel dépôt n'a pas du tout les propriétés du métal habituel. Ce n'est plus le mode de production qui en est la cause, mais la très faible épaisseur de la couche, qui est de l'ordre de 4 millimicrons, si l'on s'en rapporte aux expériences de Féry. La résistivité serait de $160 \cdot 10^{-5}$ ohms $\times$ cm., soit plus de 100 fois plus forte que celle du métal massif. Une couche de métal massif de 4 cm. de longueur et de 1 mm. de largeur aurait une résistance de quelques dizaines d'ohms au plus et les fluctuations seraient tout à fait inobservables avec le montage décrit ci-dessus.

Cependant le montage utilisé pour l'étude des fils de Wollaston permettra probablement de résoudre ce problème. Des expériences sont en cours dans ce sens.

CHAPITRE III

Résultats des mesures de fluctuations.

Dépôt A. — Résistance de Lœwe de 518 000 ohms.

En basse fréquence, lorsque la sortie de l'amplificateur est branchée sur le haut-parleur, on entend quelques crachements lorsque l'intensité du courant dépasse 0,15 milli-ampère. Mais, même pour les courants plus faibles, le spot du galvanomètre (lorsqu'on branche le couple) n'est pas très stable. Lorsqu'on fait plusieurs mesures sur la même fréquence, chacune de ces mesures durant environ 5 minutes, l'écart quadratique moyen autour de la moyenne est d'environ 5 o/o.

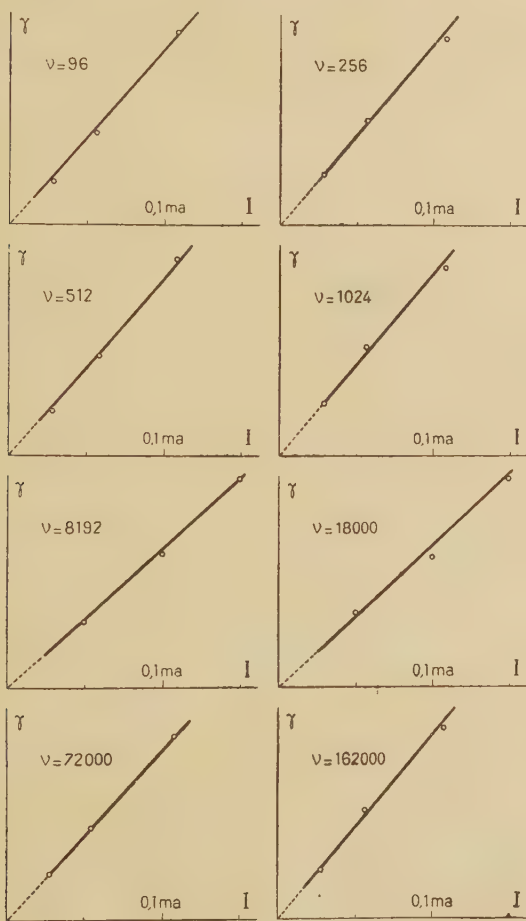
Malgré cela, la courbe qui donne $\overline{e_v^2}$ en fonction de la fréquence permet une discussion intéressante, car $\overline{e_v^2}$ est plus de 8000 fois plus grand à 96 cycles qu'à 162 000 cycles, fréquences limites étudiées.

1°. *Variation en fonction de l'intensité à fréquence constante.* — Le tableau I donne la déviation γ du galvano-

TABLEAU I

Fréquence en cycles	Déviation en millimètres		
	I = 0,0282 ma	I = 0,0564 ma	I = 0,108 ma
96	12	26,5	55
256	17,3	36	64,5
512	15,5	34,5	68
1 024	22,5	47,5	81,5
72 000	19,7	42,5	86
162 000	14,5	33	58
	I = 0,05 ma	I = 0,10 ma	I = 0,15 ma
8 192	17	34,2	54
18 000	16,2	28	45

mètre en fonction de l'intensité pour diverses fréquences. Les chiffres ne doivent être comparés entre eux que sur une



Graphiques 1 à 8.

même ligne, car la sensibilité est différente pour chaque fréquence.

Les graphiques 1 à 8 donnent γ en fonction de I pour les

diverses fréquences; γ est exprimé en une unité arbitraire différente pour chaque graphique. Les points se placent sensiblement sur des droites passant par l'origine : aucun écart systématique à noter.

On peut donc dire qu'à toute fréquence comprise entre 96 et 162 000 cycles, pour des courants variant de 30 à 150 microampères, $\overline{e_v^2}$ est à peu près proportionnel à la valeur absolue de l'intensité.

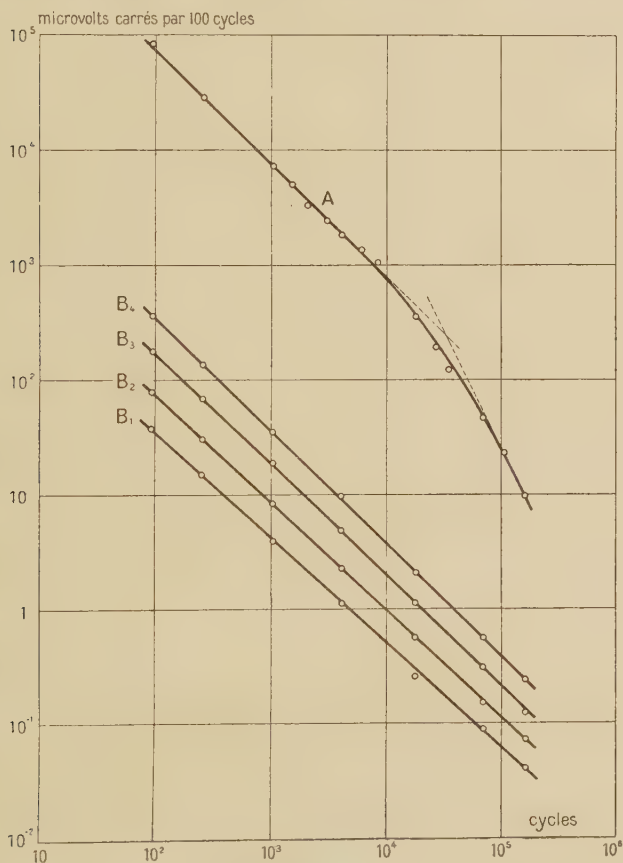
J'ai vérifié que $\overline{e_v^2}$ est bien indépendant du sens du courant.

2° *Variation en fonction de la fréquence à intensité constante.* — Les mesures ont été faites avec une seule valeur de l'intensité pour différentes fréquences ($I = 0,0455$ ma.). Le tableau II donne l'ensemble des résultats.

TABLEAU II

Fréquence en cycles	$\overline{e_v^2}$ en (microvolts) ² par 100 cycles	$\overline{e_v^2}$ moyen	Fréquence en cycles	$\overline{e_v^2}$ moyen	$\overline{e_v^2}$ moyen
96	87 600 85 700 82 100 82 400	84 450	6 154	1 293 1 380	1 336
			8 192	1 000 1 042	1 021
256	29 450 27 000	28 225	18 000	360 326	343
1 024	7 660 6 640 6 820 7 310 7 180	7 120	27 000	192,7	192,7
			36 000	119,4 118,1	118,7
1 536	5 000	5 000	72 000	50,2 39,8 46,7	45,6
2 048	3 300 3 340	3 320	108 000	22,05	22,05
3 072	2 410	2 410	162 000	10,57 8,70 10,10	9,79
4 096	1 830	1 830			

Le graphique 9 représente en coordonnées logarithmiques $\overline{e_v^2}$ en fonction de ν , à intensité constante. On voit que de 96 à 8000 cycles, $\overline{e_v^2}$ varie sensiblement en raison inverse



Graphique 9.

de ν (droite de pente -1 , tracée en pointillé) et que de 72 à 162 kilocycles, $\overline{e_v^2}$ varie en raison inverse de ν^2 (droite de pente -2 , tracée également en pointillé). Ces deux régions rectilignes se raccordent par une région curviligne.

Depôt B. — Résistance de Lœwe de 190.000 ohms.

Cette résistance fournit de très bonnes mesures. L'instabilité du spot n'est pas supérieure à celle que donnent les fluctuations thermiques en l'absence de courant, pour une même déviation moyenne (obtenue par un accroissement de sensibilité de l'amplificateur).

Pour éviter un échauffement exagéré et une détérioration possible de la résistance, le courant n'a jamais dépassé 0,5 millampère (0,05 watt). A l'oreille, le souffle reste parfaitement continu pour cette valeur du courant.

Pour des fréquences inférieures à 18 kilocycles, la précision est d'environ 20 0. En haute fréquence la précision est limitée par les fluctuations thermiques. A 162 kilocycles, l'établissement d'un courant de 0,490 ma n'augmente la

TABLEAU III

	I = 0,125 ma		I = 0,125 ma		I = 0,347 ma		I = 0,490 ma	
	$\overline{e_v}$	$\overline{e_v}$ moyen	$\overline{e_v}$	$\overline{e_v}$ moyen	$\overline{e_v}$	$\overline{e_v}$ moyen	$\overline{e_v}$	$\overline{e_v}$ moyen
100	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
200	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
300	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
400	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
500	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
600	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
700	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
800	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
900	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
1000	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
1100	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
1200	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
1300	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
1400	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
1500	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
1600	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
1700	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
1800	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
1900	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
2000	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
2100	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
2200	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
2300	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
2400	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
2500	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
2600	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
2700	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
2800	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
2900	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
3000	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
3100	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
3200	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
3300	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
3400	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
3500	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
3600	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
3700	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
3800	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
3900	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
4000	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
4100	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
4200	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
4300	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
4400	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
4500	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
4600	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
4700	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
4800	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
4900	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
5000	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
5100	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
5200	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
5300	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
5400	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
5500	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
5600	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
5700	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
5800	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
5900	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
6000	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
6100	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
6200	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
6300	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
6400	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
6500	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
6600	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
6700	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
6800	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
6900	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
7000	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
7100	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
7200	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
7300	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
7400	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
7500	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
7600	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
7700	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
7800	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
7900	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
8000	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
8100	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
8200	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
8300	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
8400	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
8500	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
8600	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
8700	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
8800	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
8900	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
9000	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
9100	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
9200	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
9300	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
9400	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
9500	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
9600	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
9700	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
9800	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
9900	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354
10000	35,2	35,3	35,2	35,2	179,5	180,2	356	354

déviatiou du spot que de 20 0/0 environ; la mesure peut encore se faire avec une précision de 5 0/0 environ. Mais l'erreur peut atteindre 30 0/0 avec la plus faible intensité (0,0151 milliamp.).

Le tableau III donne l'ensemble des résultats obtenus; ν est exprimé en cycles et $\overline{e_v^2}$ en microvolts carrés par 100 cycles. Chaque point a été déterminé deux fois, avec un intervalle de plusieurs jours entre les deux mesures. C'est la moyenne de ces deux mesures qui a été portée sur le graphique 10 qui représente, en coordonnées logarithmiques, la variation de $\overline{e_v^2}$ en fonction de ν à intensité constante.

Sauf un point aberrant à 18 kc., pour la plus faible intensité, les points se placent aux erreurs d'expérience près sur des droites dont l'inclinaison dépend de l'intensité, c'est-à-dire qu'on peut représenter les résultats expérimentaux par la formule :

$$\overline{e_v^2} = \frac{A}{\nu^m}$$

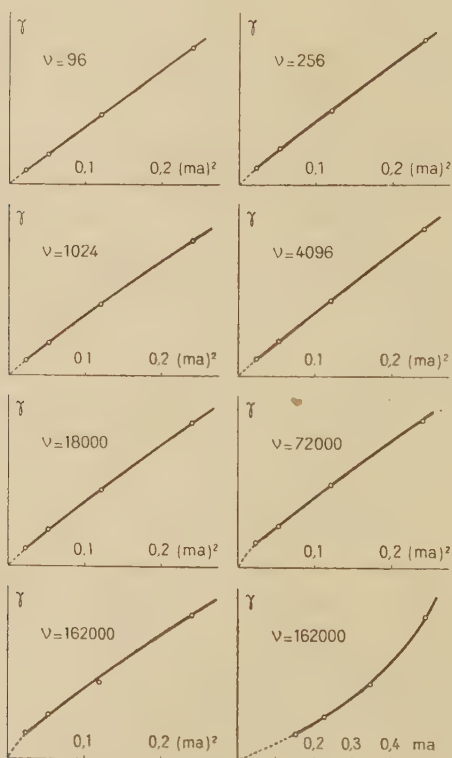
Voici les valeurs de l'exposant m pour les différentes intensités :

TABLEAU IV

I en ma	0,151	0,228	0,347	0,490
m	0,883 ± 0,020	0,933 ± 0,015	0,967 ± 0,012	0,983 ± 0,008

Les graphiques 11 à 17 représentent $\overline{e_v^2}$ en fonction de I^2 ($\overline{e_v^2}$ est exprimé en une unité arbitraire différente pour chaque graphique). Les points se placent sur une ligne droite aux plus basses fréquences. Mais en haute fréquence $\overline{e_v^2}$ croît

moins vite que I^2 . Cependant le graphique 18 où l'on a porté I en abscisses montre que $\overline{e_v^2}$ croît encore beaucoup plus vite que I à 162 kilocycles.



Graphiques 11 à 18.

Dépôt C. — Dépôt de platine blanc obtenu au laboratoire. Avant recuit, sa résistance était de 10^{10} ohms et après recuit de 31.200 ohms. Lorsque le courant dépasse 0,75 ma, on entend au haut-parleur des crachements. Pendant les mesures, le spot n'est pas aussi stable qu'avec le dépôt B. Les

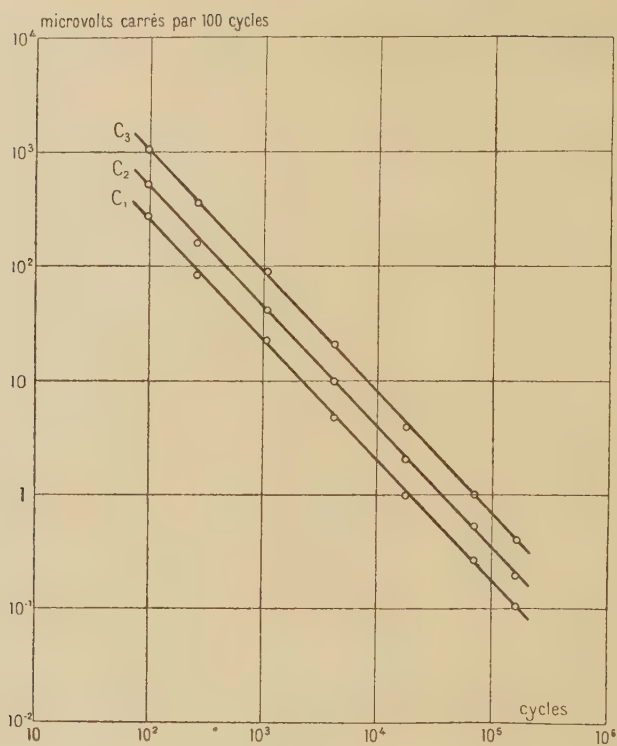
écarts autour de la moyenne atteignent 5 o/o. Le tableau V donne l'ensemble des résultats obtenus.

TABLEAU V

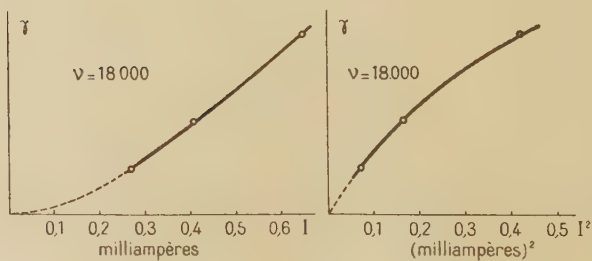
v	$I = 0,270 \text{ ma}$		$I = 0,409 \text{ ma}$		$I = 0,647 \text{ ma}$	
	$\overline{e_v^2}$	$\overline{e_v^2}$ moyen	$\overline{e_v^2}$	$\overline{e_v^2}$ moyen	$\overline{e_v^2}$	$\overline{e_v^2}$ moyen
96	272 278	275	544 510	532	1 090 1 040	1 065
256	82,4 87,6	85,0	168 160	164	343 376	360
1 024	20,6 24,2 21,7	22,2	41,2 45,4 41,2	42,6	86,9 93,6 92,1	90,9
4 096	4,64 5,14	4,89	9,54 10,33	9,93	19,1 22,5	20,8
18 000	1,06 0,94	1,00	2,10 1,98	2,04	4,01 3,89	3,95
72 000	0,260 0,249	0,254	0,550 0,510	0,530	1,045 0,950	0,998
162 000	0,105 0,098	0,1015	0,192 0,204	0,198	0,339 0,406	0,397

Le graphique 19 tracé en coordonnées logarithmiques montre que pour les trois intensités étudiées les points se placent à peu près sur trois droites parallèles. Le coefficient angulaire de ces droites est 1,062, c'est-à-dire que $\overline{e_v^2}$ varie en raison inverse de $v^{1,062}$. L'exposant est connu avec une précision supérieure à 12 o/oo, puisque une erreur de 5 o/o en sens inverse sur chacun des points extrêmes entraînerait une erreur de 12 o/oo.

Le parallélisme assez rigoureux des trois droites montre que la loi de variation de $\overline{e_v^2}$ en fonction de l'intensité est la même



Graphique 19.



Graphiques 20 et 21.

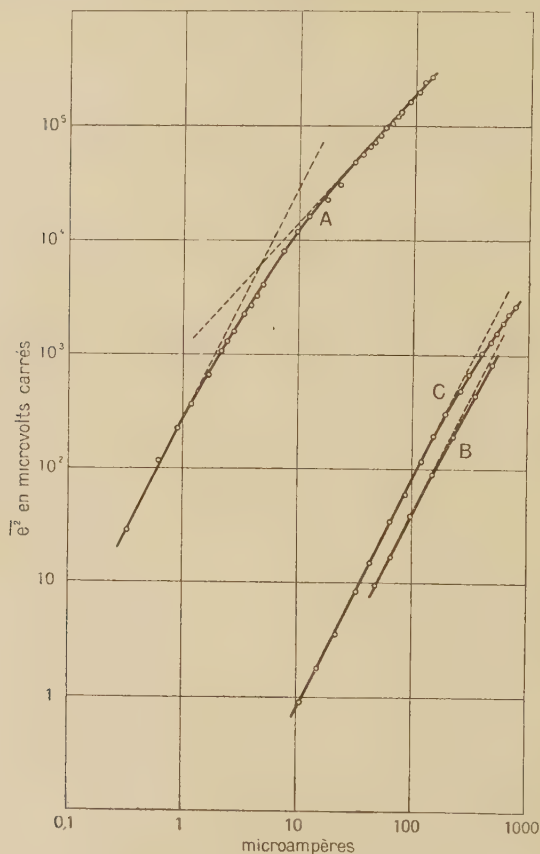
aux différentes fréquences. Le graphique 20 représente $\overline{e_v^2}$ en fonction de I et le graphique 21 en fonction de I^2 à la même fréquence de 18 kilocycles. On voit que $\overline{e_v^2}$ croît plus vite que I et moins vite que I^2 .

Nouvelle étude de $\overline{e_v^2}$ en fonction de I . — Dans les expériences précédentes, j'utilisais des intensités suffisantes pour

TABLEAU VI

Dépôt A		Dépôt B		Dépôt C	
I	$\overline{e^2}$ en (microvolts) ²	I	$\overline{e^2}$ en (microvolts) ²	I	$\overline{e^2}$ en (microvolts) ²
0,325	28,6	48,0	9,4	10,8	0,90
0,626	117	65,9	17,0	15,1	1,81
0,911	219	98,4	38,4	21,8	3,51
1,18	370	151	91,5	32,7	8,40
1,70	650	228	193	43,6	14,95
2,14	1,073 10^3	347	436	65,6	34,4
2,42	1,310	490	831	87,4	59,4
2,74	1,585			121,0	116
3,40	2,42			154,8	194
3,82	2,67			197,8	306
4,33	3,55			264	489
4,86	4,05			308,5	679
7,34	7,94			400	1,023 10^3
9,82	1,23 10^4			466	1,287
12,28	1,64			532	1,57
12,28	1,58			599	1,91
17,32	2,31			666	2,26
22,65	3,10			754	2,66
30,1	4,79				
35,4	5,58				
40,3	6,68				
45,1	7,36				
50,0	8,15				
54,4	9,78				
62,8	1,06 10^3				
70,6	1,20				
74,4	1,30				
91,1	1,59				
106,4	1,97				
121,8	2,42				
137,0	2,70				

que le phénomène fût mesurable à 162 kilocycles, sans que toutefois le dépôt s'échauffât de façon appréciable. Il m'a paru intéressant de chercher à déterminer avec plus de préci-



Graphique 22.

sion dans les trois résistances la loi de variation de $\overline{e_v^2}$ en fonction de l'intensité pour des fréquences relativement basses où le phénomène est plus gros et où l'on peut par conséquent faire varier l'intensité dans de plus larges limites.

Comme je ne désirais que des mesures relatives, j'ai utilisé une bande passante très large pour augmenter la précision. L'amplificateur sélectif BF était accordé sur la fréquence 1 024, avec $\frac{R}{4L} = 1\,200$ cycles.

Le tableau VI donne $\overline{e_v^2}$ en microvolts carrés en regard de l'intensité en microampères.

Le graphique 22 représente $\overline{e_v^2}$ en fonction de I en coordonnées logarithmiques. Les trois courbes ont la même allure. Dans les trois cas $\overline{e_v^2}$ est proportionnel à I^2 aux faibles intensités puis croît moins vite que I^2 . Pour le dépôt A, la tangente à la courbe atteint une pente de 1,1 environ, c'est-à-dire que $\overline{e_v^2}$ n'est pas très loin d'être proportionnel à I .

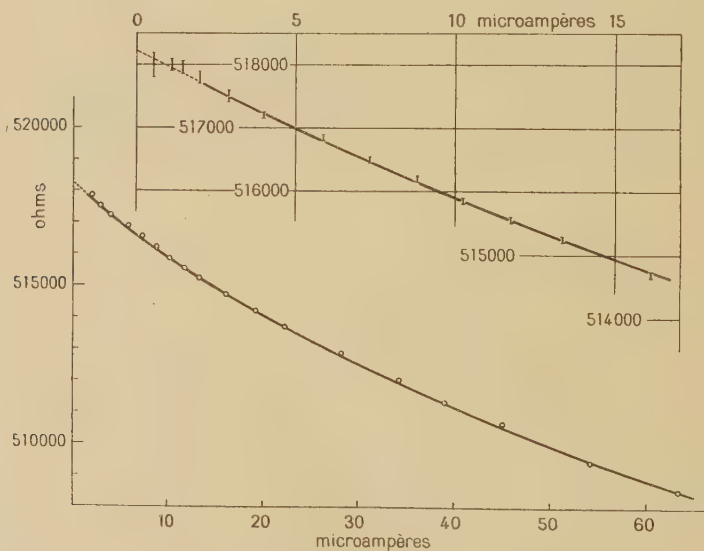
Les résultats un peu disparates obtenus d'abord proviennent donc simplement du fait que l'on ne se trouvait pas pour les trois dépôts dans la même région de la courbe représentative de $\overline{e_v^2}$ en fonction de I .

CHAPITRE IV

Ecarts à la loi d'Ohm.

La théorie de M. Léon Brillouin (8) prévoit pour la force électromotrice de fluctuation une équation de la forme :

$$\overline{e_v^2} = 4RkT + AI^2,$$



Graphiques 23 et 24.

où A est une constante qui dépend de la forme et de la nature du conducteur étudié. Cette théorie suppose que la vitesse moyenne de diffusion des électrons est petite vis-à-vis

de la vitesse quadratique moyenne d'agitation thermique; mais elle cesse d'être valable lorsque la vitesse de diffusion devient trop grande. On peut donc penser que cette condition est réalisée pour le dépôt A lorsque l'intensité est de l'ordre du microampère, mais non de 100 microampères. Mais alors, comme pour établir la loi d'Ohm, on suppose que la vitesse de diffusion est petite par rapport à la vitesse moyenne d'agitation thermique, cette loi ne doit plus être vérifiée pour des courants de cet ordre.

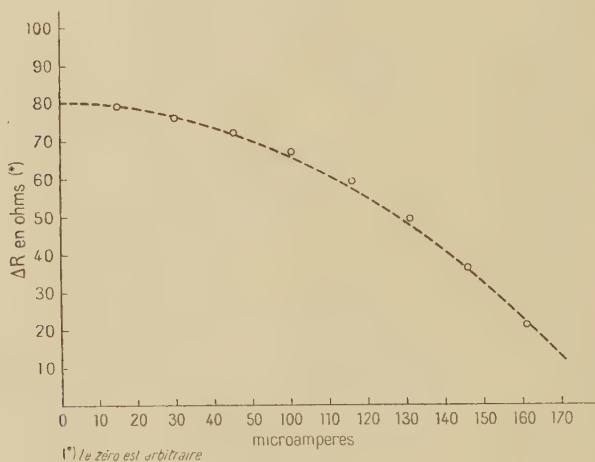
C'est pourquoi j'ai déterminé au pont de Wheatstone la résistance du dépôt A en fonction du courant qui circule dans le dépôt. Les mesures doivent être très brèves pour éviter l'échauffement. Le tableau VII et les graphiques 23 et 24 montrent les résultats obtenus.

La concavité de la courbe est dirigée vers le haut. Comme le coefficient de température de la résistivité est négatif pour tous les dépôts étudiés, cette concavité est inverse de celle que donnerait une variation de résistance par échauffement. L'écart à la loi d'Ohm atteint 1,8 o/o pour un courant de 63 microampères. Pour des intensités supérieures, on ne pourrait plus négliger l'échauffement.

TABLEAU VII

Intensité en microamp.	Résistance en ohms	Intensité en microamp.	Résistance en ohms
0,55	518 000 $\pm$ 200	13,35	515 250 $\pm$ 50
1,08	518 000 $\pm$ 100	16,1	514 700 $\pm$ 50
1,44	517 900 $\pm$ 100	19,2	514 200 $\pm$ 50
2,00	517 800 $\pm$ 100	22,3	513 700 $\pm$ 50
2,91	517 500 $\pm$ 100	28,2	512 850 $\pm$ 50
4,00	517 200 $\pm$ 50	34,2	512 000 $\pm$ 50
5,89	516 850 $\pm$ 50	38,9	511 350 $\pm$ 50
7,34	516 500 $\pm$ 50	44,9	510 650 $\pm$ 50
8,81	516 200 $\pm$ 50	54,1	509 450 $\pm$ 50
10,23	515 850 $\pm$ 50	63,2	508 550 $\pm$ 50
11,71	515 550 $\pm$ 50		

Avec les dépôts B et C, il a été impossible de mettre en évidence aucun écart à la loi d'Ohm, bien que la précision des mesures ait été de $1/100.000^e$, pour une mesure durant 0 s. 1. L'effet à mesurer, s'il existe, était masqué par la



Graphique 25.

variation de résistance par échauffement. Sur le graphique 25 ont été portées les valeurs de R en fonction de I pour le dépôt C. La courbe en pointillé est une parabole qui, on le voit, représente suffisamment les résultats expérimentaux, en sorte qu'on peut attribuer les écarts observés à l'élévation de température de la couche métallique provoquée par le passage du courant.

CHAPITRE V

Fils de Wollaston.

Dans une publication antérieure (7), j'ai décrit des expériences destinées à mesurer des fluctuations de potentiel aux extrémités d'un fil de platine de 1 micron obtenu par la méthode de Wollaston et parcouru par un courant. Je n'ai pas songé à ce moment à corriger les résultats de l'augmentation des fluctuations thermiques (Effet Johnson), par suite de l'échauffement du fil par le courant (1). Des essais effectués récemment ont montré qu'un courant de 4 ma. circulant dans un fil analogue placé dans le pétrole modifie sa résistance de 8,6 o/o. La température doit varier dans le même rapport et comme on a :

$$(1) \quad \overline{e_v^2} = 4RkT$$

l'effet thermique augmente de 18 o/o. Or l'augmentation de la déviation du galvanomètre lors du passage du courant de 4 ma. était de 19 o/o. Il se peut donc que les fluctuations observées soient entièrement dues à l'augmentation des fluctuations thermiques.

J'ai repris des expériences avec un montage différent qui a l'avantage d'éliminer les variations de l'effet thermique et permet d'utiliser des fils de faible longueur, plus faciles à obtenir.

Le fil étudié fait partie d'un circuit oscillant dont la self

(1) Cette correction est tout à fait négligeable avec les dépôts étudiés plus haut.

est faiblement amortie en sorte que presque tout l'amortissement du circuit est dû à la résistance du fil. J'utilise l'amplificateur sélectif basse fréquence avec une bande passante nettement plus étroite que la bande passante du circuit oscillant d'entrée.

Dans ces conditions, la déviation à la sortie est proportionnelle à e_v^2 et au carré du coefficient de surtension $\frac{L\omega}{R}$:

$$(2) \quad \gamma = A e_v^2 \left(\frac{L\omega}{R} \right)^2.$$

Pour les fluctuations thermiques on a donc :

$$(3) \quad \gamma = A \cdot 4RkT \left(\frac{L\omega}{R} \right)^2,$$

c'est-à-dire que γ est indépendant de la température, puisque T et R sont proportionnels.

L'analyse a été faite sur la fréquence de 275 cycles avec une bande passante efficace de 10 cycles. La self du circuit d'entrée comprend 7 600 spires de 25/100^e de millimètre, bobinées sur un noyau de limaille de permalloy en forme de tore. Pour diminuer son amortissement propre, cette bobine est plongée dans l'air liquide. Sa résistance est alors de 52 ohms en courant continu et de 70 ohms environ à 275 cycles. Sa self-induction est de 2,50 henrys.

Le fil étudié mesurait environ 1,3 mm. de longueur et sa résistance était de 295 ohms à 18°. Ce fil est obtenu par dissolution de l'enveloppe d'argent dans le mercure. A cet effet, le fil est introduit dans du mercure surmonté de pétrole. On attend environ 12 heures que l'enveloppe d'argent ait été dissoute pour toute la partie immergée dans le mercure, puis à l'aide d'une vis micrométrique on retire le fil d'une petite quantité.

Lorsque le fil est parcouru par un courant, sa résistance en ohms est donnée par la formule empirique :

$$(4) \quad R = 295 + 1,58 I^2 \quad (I \text{ en ma.}).$$

La bande passante étant très étroite, le spot n'est pas très stable. Je notai sa position toutes les 30 secondes, dix fois de suite, d'abord sans courant, puis avec courant, puis de nouveau sans courant.

Les deux tableaux suivants donnent les résultats obtenus lorsque l'intensité était de 2,09 et 2,94 milliampères. Lorsque l'intensité était de 4 milliampères, le spot était agité de façon irrégulière et il semble qu'il faille attribuer cet effet aux courants de convection dans le pétrole.

TABLEAU VIII

I = 0	I = 2,09 ma	I = 0
46	52	49
54	51	47
50	47	45
52	53	48
52	51	56
53	50	53
47	52	50
58	55	50
52	48	50
52	55	59
Moy. 51,6	Moyenne 51,4	Moy. 50,8
Moyenne :		
pour I = 0 51,2		
pour I = 2,09 ma 51,4		

TABLEAU IX

I = 2,94 ma	I = 0	I = 2,94 ma	I = 0
56	54	47	47
57	49	53	46
45	47	46	44
47	53	42	51
51	49	45	50
50	39	44	47
45	50	50	46
47	56	55	49
45	49	51	47
48	50	60	52
Moyenne 49,1	Moy. 49,6	Moyenne 48,3	Moy. 47,9
Moyenne :			
pour I = 0 48,75			
pour I = 2,94 ma 48,7			

On observe dans chaque tableau une décroissance à peu près régulière de la déviation moyenne due à une diminution progressive de l'amplification, mais il n'y a pas de variation sensible due au passage du courant (certainement moins de 2 o/o).

Cependant la force électromotrice de fluctuation augmente de façon notable lors du passage du courant. En effet, j'ai

diminué la sensibilité de l'amplificateur de façon à ne pas être gêné par les fluctuations, puis j'ai fait fonctionner l'oscillateur et j'ai noté la déviation en présence et en l'absence de courant :

$$I = 0 \quad = 134 \pm 1 \text{ mm.}$$

$$I \pm 2,83 \text{ ma.} = 120 \pm 1 \text{ mm.}$$

Ce qui montre que $\left(\frac{L\omega}{R}\right)^2$ diminue de 10,4 o/o pour un courant de 2,83 mm. (La formule empirique 4 indique une diminution de 8,9 o/o). Puisque dans l'expérience précédente la déviation restait invariable c'est que $\overline{e_v^2}$ augmentait dans le même rapport, mais que cette augmentation était due uniquement à l'augmentation des fluctuations thermiques par échauffement du fil.

CONCLUSION

J'ai essayé dans ce travail d'opérer avec des résistances métalliques relativement bien définies, mais je ne connais les conditions d'obtention que pour le dépôt C. Cependant les résultats expérimentaux ne permettent pas encore une confrontation avec la théorie électronique du phénomène, car nous ne savons pas ce qu'est une couche métallique sous d'aussi faibles épaisseurs. D'après les études de A. Féry (*loc. cit.*) le dépôt C doit avoir 4 millimicrons d'épaisseur environ et présente une résistivité 100 fois plus grande que le platine ordinaire.

Ce qui semble sûr, c'est que nous sommes en présence d'un phénomène nouveau présentant une certaine généralité. Malgré la différence de nature des dépôts A et B d'une part, et du dépôt C d'autre part, le phénomène de fluctuation présente dans ces trois cas des caractères communs qui le différencient de tout autre phénomène de fluctuation observé jusqu'à ce jour.

a) $\overline{e_v^2}$ est proportionnel à I^2 pour de faibles intensités, puis croît moins vite que I^2 .

b) On retrouve dans chaque cas une région relativement étendue de fréquence et d'intensité où $\overline{e_v^2}$ varie à peu près en raison inverse de la fréquence.

Ces faits sont à rapprocher de ceux observés par E. Meyer et E. Thiede. Ces auteurs, qui ont travaillé avec différents

dépôts de graphite, indiquent que $\overline{e_v^2}$ varie proportionnellement à $\left(\frac{1}{v}\right)^m$, où m est compris entre 1 et 2, pour des fréquences comprises entre 100 et 10 000 cycles. Par contre, $\overline{e_v^2}$ est toujours proportionnel à 1^2 , bien qu'ils aient utilisé des intensités susceptibles d'échauffer notablement les dépôts dans l'air (énergie de l'ordre du watt).

Personnellement, je n'ai pas dépassé 0 w. 01 pour le dépôt A, 0 w. 05 pour le dépôt B et 0 w. 018 pour le dépôt C.

Une loi du type $\overline{e_v^2} = \frac{A}{v^m}$ avec $m < 2$ est tout à fait nouvelle. On sait que pour les phénomènes de fluctuation étudiés jusqu'ici (effet thermique dans les conducteurs et effet de discontinuité des charges électriques dans les lampes), $\overline{e_v^2}$ est indépendant de la fréquence. Ce résultat est commun à tout phénomène pour lequel les temps de corrélation sont très courts par rapport aux périodes étudiées. Si, au contraire, les temps de corrélation sont très longs par rapport aux périodes d'étude, $\overline{e_v^2}$ doit varier en raison inverse de v^2 . C'est ce qu'on observe avec le dépôt A pour des fréquences supérieures à 72 Kc. et on peut penser qu'il en serait de même pour les autres dépôts si l'on pouvait pousser l'étude jusqu'à des fréquences suffisamment élevées.

Une telle loi de variation indique donc, d'une part, que les temps de corrélation sont de l'ordre des périodes étudiées, et, d'autre part, fait songer à un mécanisme identique dans les trois cas, puisque cette loi doit dépendre essentiellement du mécanisme, qui détermine la fonction de corrélation.

Ce travail a été fait au laboratoire de physique expérimentale du Collège de France. Je remercie vivement M. Langevin de m'avoir accueilli dans son laboratoire et d'avoir mis à ma disposition les appareils nécessaires pour mener à bien ce

travail. Je remercie MM. L. Brillouin, Bauer et Courtines pour leur constante bienveillance et pour leurs critiques, qui m'ont beaucoup aidé à faire de cette étude un ensemble cohérent. Je dois en particulier à M. Courtines plusieurs démonstrations mathématiques qui figurent dans la première partie de ce travail. Je remercie enfin M. Fery, assistant au laboratoire, qui m'a fait profiter de son expérience des couches minces et a bien voulu s'occuper de la réalisation matérielle des dépôts que j'ai étudiés.

BIBLIOGRAPHIE

1. W. SCHOTTKY. — *Ann. der Phys.*, **57** (1918), 541 et **28** (1926), 74.
 2. N. H. WILLIAMS et H. B. VINCENT. — *Phys. Rev.*, **28** (1926), 1250.
 3. E. W. THATCHER et N. H. WILLIAMS. — *Phys. Rev.*, **39** (1932), 474.
 4. J. B. JOHNSON. — *Phys. Rev.*, **29** (1927), 367 et **32** (1928), 97.
 5. H. NYQUIST. — *Phys. Rev.*, **32** (1928), 110.
 6. P. W. BRIDGMANN. — *Phys. Rev.*, **31** (1928), 101.
 7. J. BERNAMONT. — *C. R.*, **198** (1934), 1755 et 2144.
 8. L. BRILLOUIN. — *Helvetica Phys. Acta*, **7** (1934), 47.
 9. E. MEYER et H. THIEDE. — *Elektr. Nach. Tech.*, **12** (1935), 237.
 10. L. BRILLOUIN et M. LEVY. — *C. R.*, **194** (1932), 1151.
 11. A. FÉRY. — *Ann. de Phys.*, **19** (1933), 421.
 12. M. COURTINES. — Les fluctuations dans les appareils destinés aux mesures électriques. *Congrès international d'électricité*, 1932.
-

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Le neutron

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 4^{er} avril 1936.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

CH. MAURAIN.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.

